ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضیات گسسته** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

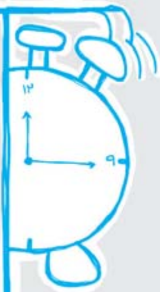
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. آزمون‌های شمارهٔ ۹، ۱۰ و ۱۱ به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۹۸، شهریور ۹۸ و دی ۹۷ است.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضیات گسسته نیاز دارید، تنها در ۱۶ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

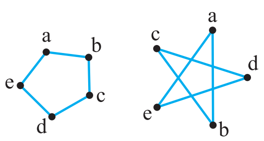
بارم‌بندی درس ریاضیات گسسته

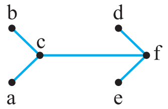
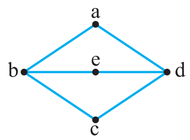
شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
فصل اوّل		۱۵	۵
فصل دوم	تا صفحهٔ ۴۲	۵	۲
	بعد از صفحهٔ ۴۲		۵
فصل سوم			۸
جمع		۲۰	۲۰

فصل اول

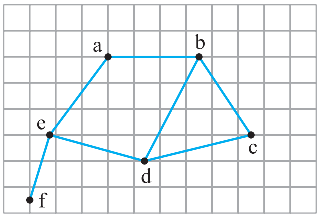
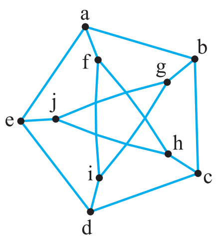
ردیف	سؤال	نمره
۱	الف) آیا اعداد صحیحی مانند x و y وجود دارند که: $x^{۲}+y^{۲}=(x+y)^{۲}$ ب) آیا مقادیر حقیقی و غیرصفر x و y وجود دارند که: $x+y\neq ۰$ $\quad \frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$	۱/۵
۲	جاهای خالی را پر کنید. الف) $[-۴,۱۶]=$ .... ب) اگر $a\mid b$، آن‌گاه .... $=(a,b)$ پ) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a\mid p$ در این صورت .... $=a$ یا .... $=a$.	۱
۳	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) $\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^{n}\overset{m}{\equiv}b^{n} \\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$ ب) $ac\overset{m}{\equiv}bc \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$ پ) شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $[a,b]\mid c$. ت) در مسائل تقویم‌نگاری از هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ استفاده می‌شود.	۱
۴	اگر x و y گنگ ولی $x+y$ گویا باشد، ثابت کنید: $x-y$ و $x+۲y$ گنگ هستند. (به روش برهان خلف) *یادت باشه در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد.*	۱
۵	به روش بازگشتی برای هر x و y حقیقی که $x+y>۰$ باشد، ثابت کنید: $\frac{x^{۳}+y^{۳}}{x+y}\geq xy$ *در روش بازگشتی هر وقت به یک عبارت همواره درست رسیدی کار تمام است.*	۱/۵
۶	خاصیت تعدی در رابطهٔ عادکردن را بیان و اثبات نمایید. *گفته: بیان و اثبات.*	۱/۲۵
۷	اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است. *بخش‌پذیربودن یعنی باقی‌ماندهٔ صفر داشتن.*	۱/۲۵
۸	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴۲ را بیابید.	۱/۲۵
۹	اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $c\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه ثابت کنید: $a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c$	۱/۲۵
۱۰	باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۲۳)^{۶}+۱۶$ را بر ۱۱ بیابید.	۱/۲۵
۱۱	تمام اعداد صحیحی که ۷ برابر آن‌ها منهای ۳ بر ۹ بخش‌پذیر باشند را بیابید. *اول سعی کن صورت سؤال را به زبان ریاضی بنویسی.*	۱/۲۵
۱۲	نشان دهید معادلهٔ سیالهٔ $۶x+۱۴y=۱۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد. سپس آن را حل کنید.	۱/۵

فصل دوم

ردیف	سؤال	نمره
۱۳	برای دو نمودار مقابل با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر کدام، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.  $(G_{۱})$ $\quad$ $(G_{۲})$	۱

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱ — نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره
۱۴	نمودار گراف G به صورت مقابل است: الف) درجات رئوس گراف G را بنویسید. ب) چه یال‌هایی به گراف G اضافه کنیم تا گراف ۳ ـ منتظم مرتبهٔ ۶ شود؟  یادت که هست در گراف ۳ـ منتظم، درجهٔ همهٔ رئوس ۳ است.	۱/۵
۱۵	گراف G، ۳ ـ منتظم است و با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گراف کامل به دست می‌آید؛ الف) مرتبه و اندازهٔ گراف را به دست آورید. ب) نموداری از این گراف رسم کنید. حواست باشه گفته یال اضافه می‌کنیم تا کامل شود. در قسمت (الف) هم مرتبه و اندازهٔ گراف اولیه را خواسته.	۱/۵
۱۶	نمودار گراف G به صورت مقابل است: الف) طولانی‌ترین مسیر از a به c را بنویسید. ب) تمام دورهای به طول ۴ را در این گراف بنویسید.  به کلمهٔ طولانی در قسمت (الف) دقت کن.	۱
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

	ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	
ردیف	آزمون شمارهٔ ۹		نوبت دوم پایهٔ دوازدهم- نهایی خرداد ۹۸		نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) یک گراف کامل ۸رأسی، .... یال دارد. ب) در یک گراف از مرتبهٔ ۱۰ با $\Delta = ۳$ حداقل .... رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است. پ) اگر در گراف G از مرتبهٔ p داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$، در این صورت $\Delta(G)$ برابر .... است. ت) مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با .... است.	۲
۳	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۵n - ۳m$ بر ۱۳ را به دست آورید.	۱/۵
۴	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۵	با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱/۵
۶	شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد. الف) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید. ب) مجموعهٔ $N_G(b)$ را بنویسید. پ) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید. 	۱/۵
۷	گراف $C_۷$ را در نظر بگیرید و به سؤالات مقابل پاسخ دهید. الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴عضوی بنویسید. ب) عدد احاطه‌گری $C_۷$ را به دست آورید. پ) دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم متمایز بنویسید.	۱/۵
۸	الف) ثابت کنید هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟ ب) در گراف روبه‌رو یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵عضوی را مشخص کنید. 	۱/۵
۹	الف) یک گراف ۶رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد. ب) یک گراف ۶رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	با ارقام ۱,۱,۲,۲,۳,۲,۴,۴,۵ چند عدد ۹رقمی می‌توان نوشت؟	۱
۱۱	۶ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: الف) به صورت یک‌درمیان قرار بگیرند. ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند. پ) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.	۱/۵
۱۲	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۰$ با شرط $x_i > ۰, i = ۲,۳,۴,۵$ را محاسبه کنید.	۱
۱۳	اگر سه دوست هم‌سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟	۱/۵
۱۴	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟	۱/۲۵
۱۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	موفق باشید جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- الف) از حل طرفین تساوی داریم:

$$x^۲+y^۲=x^۲+y^۲+۲xy \Rightarrow ۲xy=۰ \Rightarrow x=۰ \ \text{یا}\ y=۰$$

یعنی اگر $x=۰$ باشد، برای هر y صحیحی تساوی برقرار است.

اگر $y=۰$ باشد، برای هر x صحیحی تساوی برقرار است.

اگر هر دو متغیر x و y صفر باشند، تساوی نیز برقرار است.

ب)

$$\frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} \Leftrightarrow \frac{۱}{x+y}=\frac{x+y}{xy}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^۲=xy \Leftrightarrow x^۲+y^۲+۲xy-xy=۰$$

$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲+xy=۰$$

با توجه به تساوی $(x+y)^۲=xy$، xy همواره مثبت است. مجموع سه عبارت همواره مثبت صفر شده است. چون x و y غیرصفرند، پس مسئله جواب ندارد.

۲- الف) ک.م.م دو عدد ۴- و ۱۶ برابر ۱۶ است.

ب) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

پ) $a=۱$ یا $a=p$

۳- الف) درست؛ طرفین یک همنهشتی را می‌توان به توان عدد طبیعی n رساند.

ب) نادرست؛ وقتی عدد ناصفر c از طرفین یک همنهشتی حذف شود پیمانهٔ m همواره ثابت نمی‌ماند.

$$\begin{cases} ac\overset{m}{\equiv}bc \Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b \\ (c,m)=d \end{cases}$$

پ) نادرست؛ شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)|c$.

ت) درست؛ در مسائل تقویم‌نگاری با تعداد روزهای هفته مواجه هستیم پس باید از همنهشتی در پیمانهٔ ۷ استفاده کنیم.

۴- فرض می‌کنیم $x-y$ گنگ نباشد، پس گویاست.

$$\begin{cases} x-y=\text{گویا} \\ x+y=\text{گویا (فرض مسئله)} \end{cases} \Rightarrow x=\text{گویا}$$

که این با فرض گنگ‌بودن x در تناقض است.

فرض می‌کنیم $x+۲y$ گنگ نباشد، پس گویا است.

$$\begin{cases} x+۲y=\text{گویا} \\ x+y=\text{گویا} \end{cases} \Rightarrow y=\text{گویا}$$

که این با فرض گنگ‌بودن y در تناقض است.

در نتیجه در هر دو قسمت، فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵- با توجه به این‌که $x+y>۰$ مثبت است، ابتدا کل نامساوی را در $x+y$ ضرب می‌کنیم. (جهت نامساوی عوض نمی‌شود.)

$$\Leftrightarrow x^۳+y^۳\ge(x+y)xy$$

با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^۲-xy+y^۲)\ge(x+y)(xy)$$

با حذف $x+y$ از طرفین نامساوی داریم: $(x+y>۰)$

$$\Leftrightarrow (x^۲-xy+y^۲)\ge xy$$

$$\Leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲\ge۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲\ge۰$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی قسمت‌ها برگشت‌پذیرند. پس اثبات تمام است.

۶- خاصیت تعدی: اگر $a|b$ و $b|c$ آن‌گاه $a|c$.

اثبات خاصیت تعدی‌بودن:

$$a|b \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Z}\ ,\ b=aq$$

$$b|c \Rightarrow \exists q'\in\mathbb{Z}\ ,\ c=bq'$$

اکنون b را از تساوی بالا در تساوی پایین جای‌گذاری می‌کنیم:

$$c=(aq)q'=a(\underbrace{qq'}_{q''})=aq'' \Rightarrow a|c$$

۷- تقسیم کلی $a=bq+r$ را در نظر می‌گیریم:

طبق فرض $n|a$ و $n|b$ در نتیجه، n هر مضرب صحیحی از b را نیز عاد می‌کند؛ یعنی: برای هر $q\in\mathbb{Z}$، $n|bq$.

$$\Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|bq \end{cases} \xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} n|a-bq$$

که $a-bq=r$ است. پس $n|r$. یعنی r بر n بخش‌پذیر است.

۸- طبق قضیهٔ تقسیم:

$$\begin{matrix} a=۶q+۳ \\ a=۷q'+۴ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ۷a=۴۲q+۲۱ \\ ۶a=۴۲q'+۲۴ \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} ۷a-۶a=(۴۲q+۲۱)-(۴۲q'+۲۴)$$

$$\Rightarrow a=۴۲(\underbrace{q-q'}_{q''})+(۲۱-۲۴) \Rightarrow a=۴۲q''-۳$$

اما (۳-) به عنوان باقی‌مانده قابل قبول نیست. می‌دانیم: $-۳=۳۹-۴۲$

در نتیجه: $a=۴۲q''-۴۲+۳۹=۴۲(\underbrace{q''-۱}_{k})+۳۹ \Rightarrow a=۴۲k+۳۹$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴۲ برابر ۳۹ است.

۹- طبق تعریف همنهشتی، اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ آن‌گاه $m|a-b$. مقدار صحیح c را به طرف راست اضافه و کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow m|a+c-b-c \Rightarrow m|(a+c)-(b+c)$$

در نتیجه، طبق تعریف همنهشتی: $a+c\overset{m}{\equiv}b+c$

به طریق مشابه برای اثبات $a-c\overset{m}{\equiv}b-c$ داریم:

$$m|a+c-b-c \Rightarrow m|(a-c)-(b-c) \Rightarrow a-c\overset{m}{\equiv}b-c$$

۱۰- ابتدا ۲۳ را بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم: $۲۳=۱۱(۲)+۱ \Rightarrow ۲۳\overset{۱۱}{\equiv}۱$

حال طرفین را به توان ۶ می‌رسانیم: $(۲۳)^۶\overset{۱۱}{\equiv}۱^۶ \Rightarrow (۲۳)^۶\overset{۱۱}{\equiv}۱$

با اضافه‌کردن ۱۶ به طرفین همنهشتی داریم: $(۲۳)^۶+۱۶\overset{۱۱}{\equiv}۱+۱۶ \Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۱۷$

اما ۱۷ از پیمانهٔ ۱۱ بزرگ‌تر است، در نتیجه:

$$۱۷=۱(۱۱)+۶ \Rightarrow ۱۷\overset{۱۱}{\equiv}۶ \Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۶$$

۱۱- بیان ریاضی مسئله به صورت زیر است:

$$۷x-۳\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}۳$$

دو بار پیمانهٔ ۹تایی را به عدد ۳ اضافه می‌کنیم تا طرف راست بر ۷ بخش‌پذیر شود:

$$۷x\overset{۹}{\equiv}۳+۲(۹) \Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}۲۱$$

اکنون طرفین را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۷x \overset{۹}{\equiv} ۲۱ \\ (۷,۹)=۱ \end{cases} \xrightarrow{\div ۷} x \overset{۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۹q+۳$$

یعنی هر عدد صحیح به فرم $x = ۹q+۳$ دارای خاصیت گفته‌شده می‌باشد.

۱۲- اولاً $(۶,۱۴)=۲$ و $۲ \mid ۱۰$، پس معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد. برای حل، کل معادله را بر دو تقسیم می‌کنیم:

$$۳x+۷y=۵ \Rightarrow ۷y \overset{۳}{\equiv} ۵$$

اما $۷ \overset{۳}{\equiv} ۱, ۵ \overset{۳}{\equiv} -۱$ در نتیجه:

$$y \overset{۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow y = ۳k-۱$$

با جای‌گذاری y، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$۳x+۷(۳k-۱)=۵ \Rightarrow ۳x = -۲۱k+۱۲$$

$$\Rightarrow x = -۷k+۴ \Rightarrow \begin{cases} x=-۷k+۴ \\ y=۳k-۱ \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۳- مجموعهٔ رئوس را با $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌ها را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف $G_۱$ عبارت‌اند از:

$$V(G_۱) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G_۱) = \{ab, ae, bc, cd, de\}$$

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف $G_۲$ عبارت‌اند از:

$$V(G_۲) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G_۲) = \{ab, ae, bc, cd, de\}$$

چون $V(G_۱)=V(G_۲)$ و $E(G_۱)=E(G_۲)$ پس دو نمودار داده‌شده مربوط به یک گراف هستند.

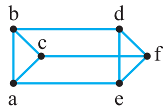
۱۴- الف)

$$\deg(a)=۱, \deg(b)=۱, \deg(c)=۳$$

$$\deg(d)=۱, \deg(e)=۱, \deg(f)=۳$$

ب) گراف ۳ـ منتظم یعنی درجهٔ همهٔ رئوس ۳ باشد. f و c که درجه‌شان ۳ است.

حال اگر d به e و b وصل شود و a هم به b و e، آن‌گاه با توجه به شکل درجهٔ تمام رئوس برابر ۳ است، پس یک گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶ داریم.



۱۵- الف) در گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ p، درجهٔ همهٔ رئوس برابر ۳ است پس تعداد یال‌ها $q = \frac{۳\times p}{۲}$ خواهد بود. طبق فرض اگر به این تعداد یال، ۶ یال دیگر اضافه کنیم گراف کامل حاصل می‌شود. در نتیجه:

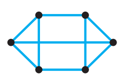
$$\frac{۳p}{۲}+۶ = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

که $\frac{p(p-۱)}{۲}$ تعداد یال‌های گراف کامل k_p است.

$$\Rightarrow ۳p+۱۲ = p^۲-p \Rightarrow p^۲-۴p-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (p-۶)(p+۲)=۰ \Rightarrow p=۶ \Rightarrow q=\frac{۳\times ۶}{۲}=۹$$

ب) باید یک گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶ (که دارای ۹ یال خواهد بود) رسم کنیم.



۱۶- الف) مسیر از a به c یعنی از a شروع کنیم.

abedc $\Rightarrow$ طول مسیر $= ۴$ یا adebc $\Rightarrow$ طول مسیر $= ۴$

ب) ۳تا دور به طول ۴ دارد که عبارت‌اند از:

abeda   abcda   cbedc

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- اگر دو عدد $a\,,b$ نامنفی باشند، $\frac{a+b}{۲}$ میانگین حسابی و $\sqrt{ab}$ میانگین هندسی آن‌هاست. پس حکم چنین خواهد بود: $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$

$$\xrightarrow[\text{روش بازگشتی}]{\text{اثبات به}}\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\geq ۲\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq ۰$$

$$\xleftrightarrow{\text{اتحاد}}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲}\geq ۰\ \text{گزارهٔ همیشه درست}$$

۲- الف) $\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$ ب) ۳ رأس

پ) $p-۱$ ت) ۱۵

۳-
$$\begin{cases}m=۱۳q_۱+۲\\ n=۱۳q_۲+۹\end{cases}\begin{matrix}\xrightarrow{\times ۳}\\ \xrightarrow{\times ۵}\end{matrix}\begin{cases}۳m=۱۳(۳q_۱)+۶\\ ۵n=۱۳(۵q_۲)+۴۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵n-۳m=۱۳(\overbrace{۵q_۲-۳q_۱}^{q'})+(۴۵-۶)$$

$$\Rightarrow ۵n-۳m=۱۳q'+۳۹\Rightarrow ۵n-۳m=۱۳(\underbrace{q'+۳}_{q''})+۰$$

$$\Rightarrow ۵n-۳m=۱۳q''+۰\Rightarrow r=۰$$

۴- روز اول مهر ، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم. ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصلهٔ اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

$$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۳۱\Rightarrow ۱۳۱\overset{۷}{\equiv}۵$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

که متناظر با عدد ۵ در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد. پس ۱۲ بهمن پنج‌شنبه است.

۵- چون $(۵,۲)=۱$ و $۱|۱۸$ پس معادلهٔ سیاله دارای جواب صحیح است.

$$\Rightarrow ۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow[\div ۲]{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow y = ۵k+۴$$

اکنون با جای‌گذاری y در معادله، x را می‌یابیم:

$$۵x+۲(۵k+۴)=۱۸ \Rightarrow x=\frac{-۱۰k+۱۸-۸}{۵}=-۲k+۲ \Rightarrow x=-۲k+۲$$

۶- الف) مرتبه یعنی تعداد رئوس، پس $p=۶$

اندازه یعنی تعداد یال‌ها، پس $q=۷$

ب) مجموعهٔ $N_G(b)$ یعنی مجموعهٔ رئوسی از گراف G که به b متصل باشند:

$N_G(b)=\{a,c,d\}$

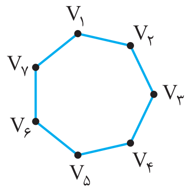
پ) می‌دانیم $q_{\bar{G}}+q_G=q(k_p)$ و $q(k_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$ در نتیجه:

$$q_{\bar{G}}+۷=\frac{۶(۶-۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow q_{\bar{G}}+۷=۱۵ \Rightarrow q_{\bar{G}}=۱۵-۷=۸$$

پس مجموع درجات رئوس گراف $\bar{G}$ برابر $۲q_{\bar{G}}$ یعنی $۱۶=(۸)۲$ است.

۷- الف) باید ۴ رأس را طوری انتخاب کنیم که به کمک آن‌ها تمام رئوس گراف احاطه شده باشند.



$D=\{V_۱,V_۳,V_۴,V_۵\}$

ب) $\gamma(C_۷)=\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۷}{۲+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۷}{۳}\right\rceil=۳$

پ) باید دو مجموعهٔ احاطه‌گر ۳عضوی بیابیم:

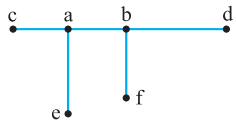
$D_۱=\{V_۱,V_۳,V_۵\}$

$D_۲=\{V_۲,V_۴,V_۶\}$

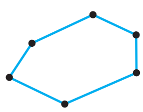
۸- الف) فرض کنید مجموعهٔ $A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال باشد، در این صورت طبق تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک یا چند عضو در مجموعهٔ A وجود دارد که با حذف آن‌ها مینیمال‌بودن مجموعهٔ احاطه‌گر حفظ می‌شود. این موضوع را برای تک‌تک عضوهای مجموعهٔ A بررسی می‌کنیم. بدین صورت که عضو $a_۱$ را در نظر می‌گیریم. اگر با حذف آن احاطه‌گری مجموعهٔ A حفظ شد، عضو $a_۱$ را حذف می‌کنیم در غیر این صورت آن را نگه می‌داریم و به سراغ عضو $a_۲$ می‌رویم. با ادامهٔ همین روند برای سایر رئوس، آن رأس یا رأس‌هایی که اصطلاحاً اضافی هستند و با حذف آن‌ها احاطه‌گری به هم نمی‌خورد، حذف شده‌اند و مجموعهٔ احاطه‌گر باقی‌مانده مینیمال است.

ب) $A=\{h,g,f,i,j\}$

۹- الف) فقط مجموعهٔ $D=\{a,b\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر ۲عضوی است.



ب) کافی است $C_۶$ را رسم کنیم:



۱۰- طبق فرمول مبحث جایگشت باتکرار داریم:

$$P=\frac{۹!}{۳!\times۲!\times۲!} \Rightarrow P=۳\times۷!$$

عدد ۲ سه بار تکرار شده است. عدد ۱ دو بار تکرار شده است. عدد ۴ دو بار تکرار شده است.

۱۱- الف) ۶ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به $۶!$ و ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به $۵!$ با هم جابه‌جا می‌شوند:
$۶!\times۵!$

ب) دانش‌آموزان یازدهم را در یک دسته قرار می‌دهیم:

این دسته با ۶ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم ۷ شیء متمایزند و به $۷!$ حالت جابه‌جا می‌شوند و $۵!$ هم جابه‌جایی دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم درون دسته است. $۷!\times۵!$

پ) آن دو دانش‌آموز خاص به $۲!$ کنار هم قرار می‌گیرند.

اگر از کل دانش‌آموزان که ۱۱تا بودند ۲تا را کنار بگذاریم، ۹ دانش‌آموز باقی می‌ماند. یک دستهٔ دونفری و ۹ دانش‌آموز باقی‌مانده ۱۰ شیء متمایزند و به $۱۰!$ حالت جابه‌جا می‌شوند.
$۱۰!\times۲!$

۱۲- بیان سادهٔ شرط‌ها: $x_۱\geq۰, x_۲>۰, x_۳>۰, x_۴>۰, x_۵>۰$

$$\Rightarrow x_۱\geq۰, x_۲\geq۱, x_۳\geq۱, x_۴\geq۱, x_۵\geq۱$$

جمع شرط‌ها برابر ۴ است. مقدار n اولیه ۱۰ پس $n_{جدید}=۱۰-۴=۶$. اکنون با $n_{جدید}=۶$ و $k=۵$ داریم:

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۶+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$$

۱۳- باید دو مربع لاتین و متعامد ۳×۳ بسازیم. A، B و C نشان‌دهندهٔ ۳ دوست هستند. اعداد داخل مربع لاتین اول، شمارهٔ کت‌ها و اعداد داخل مربع لاتین دوم شمارهٔ پیراهن‌ها هستند.

مربع لاتین (۱)

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

و

مربع لاتین (۲)

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

$\Rightarrow$

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

۱۴-

$A=\{$اعداد بین ۱ تا ۹۰ بخش‌پذیر بر ۲$\}, |A|=\left[\frac{۹۰}{۲}\right]=۴۵$

$B=\{$اعداد بین ۱ تا ۹۰ بخش‌پذیر بر ۳$\}, |B|=\left[\frac{۹۰}{۳}\right]=۳۰$

$A\cap B=\{$اعداد بین ۱ تا ۹۰ بخش‌پذیر بر ۶$\}, |A\cap B|=\left[\frac{۹۰}{۶}\right]=۱۵$

$$\Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$=۴۵+۳۰-۱۵=۶۰$$

۱۵- تعداد لانه‌ها: $۷\times۱۲=۸۴$

تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش‌آموز

$۵۰۵ \div ۸۴$: $۵۰۵-۵۰۴=۱$، خارج قسمت ۶ ؛ $۶+۱=۷$

طبق اصل لانه‌کبوتری لااقل ۷ نفر آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

فصل ۱: آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گوییم.

مثال **برای نتیجه‌گیری‌های کلی زیر مثال نقض بیاورید.**

الف) برای هر عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

ب) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

پ) مجموع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.

ت) عدد $2^{2^n}+1$ به ازای همهٔ عددهای طبیعی n، عددی اول است.

ث) برای هر عدد طبیعی n، عدد 3^n+4 اول است.

ج) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

پاسخ الف) قرار می‌دهیم $x=16$ و $y=9$ آن‌گاه:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x+y}&=\sqrt{9+16}=5\\ \sqrt{x}&=\sqrt{16}=4\\ \sqrt{y}&=\sqrt{9}=3\end{aligned}\right\}5\neq 4+3$$

ب) اگر دو عدد گنگ را $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه: $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

و صفر عددی گویاست.

پ) برای دو عدد اول ۲ و ۳، مجموع آن‌ها ۵ می‌شود که عددی مرکب نیست.

ت) برای $n=1,2,3,4$ حاصل $2^{2^n}+1$ اول است، اما برای $n=5$ داریم:

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=641\times 6700417$$

که عددی اول نیست.

ث) برای $n=1,2,3$، حاصل 3^n+4 اول است، اما برای $n=4$ داریم:

$$3^4+4=81+4=85$$

و ۸۵ عددی اول نیست.

ج) برای $n=2$ گزاره برقرار نیست. زیرا عدد ۲ را نمی‌توان به صورت مجموع دو عدد طبیعی متوالی نوشت. (هر عدد به فرم $n=2^k$ ، $k\in\mathbb{N}$ مثال نقض است.)

تذکر دیدیم که مثال نقض، روشی برای نشان‌دادن نادرستی یک گزاره است. برای اثبات درستی یک گزاره، روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارت‌اند از: اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، اثبات مستقیم، اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف و اثبات به روش بازگشتی.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال **ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، n^2+n عددی زوج است.**

پاسخ با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن برای n، مسئله را اثبات می‌کنیم.

حالت اول n زوج باشد، در این صورت: $n=2k\ ;k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2(\underbrace{2k^2+k}_{k'})=2k'$$

پس n^2+n زوج است.

حالت دوم n فرد باشد، در این صورت: $n=2k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow n^2+n=(2k+1)^2+(2k+1)$$

$$=4k^2+4k+1+2k+1=4k^2+6k+2=2(\underbrace{2k^2+3k+1}_{k'})=2k'$$

پس n^2+n زوج است.

مثال **فرض کنید $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{3,4\}$. اگر $x\in A$ و $\frac{x^2(x+1)^2}{4}$ زوج باشد، ثابت کنید $x\in B$.**

پاسخ با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های $x\in A$، مسئله را ثابت می‌کنیم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{1\times 4}{4}=1$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x=2 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{4\times 9}{4}=9$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x=3 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{9\times 16}{4}=36$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x=3$ عضو B است.

$$x=4 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{16\times 25}{4}=100$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x=4$ عضو B است.

$$x=5 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{25\times 36}{4}=225$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

مثال **با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن، ثابت کنید حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.**

پاسخ در مثال اول این بخش ثابت کردیم برای هر عدد طبیعی n، n^2+n زوج است. $n^2+n=n(n+1)=$ ضرب دو عدد متوالی

یعنی ضرب دو عدد متوالی، همواره زوج است و در نتیجه ضرب سه عدد متوالی نیز همواره زوج خواهد بود؛ پس بر ۲ بخش‌پذیر است. در ادامه نشان می‌دهیم ضرب سه عدد متوالی بر ۳ هم بخش‌پذیر است که از این دو نتیجه می‌گیریم که ضرب سه عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

با در نظر گرفتن حالت‌های $n=3k$، $n=3k+1$ و $n=3k+2$ داریم:

$$n=3k \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k)(3k+1)(3k+2)$$

$$=3(\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{k'})=3k'$$

$$n=3k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$$

$$=(3k+1)(3k+2)(3)(k+1)=3(\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)}_{k'})=3k'$$

$$n=3k+2 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)$$

$$=(3k+2)(3)(k+1)(3k+4)=3(\underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)}_{k'})=3k'$$

پس در هر سه حالت ممکن، $n(n+1)(n+2)$ مضرب ۳ است. در نتیجه $n(n+1)(n+2)$ مضرب ۶ است.

اثبات به روش مستقیم

در روش مستقیم به کمک فرض و با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، حکم را نتیجه می‌گیریم.

مثال **نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n عددی فرد باشد، آن‌گاه:

$$n=2k+1 \Rightarrow n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4\underbrace{k(k+1)}+1$$

اما k و $k+1$ دو عدد متوالی‌اند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها همواره زوج است. در نتیجه $k(k+1)=2q$؛ بنابراین: $n^2=4(2q)+1=8q+1$

مثال **اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید؛ a^2+b^2 زوج است.**

پاسخ می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد صحیح a و b زمانی فرد است که هر دوی آن‌ها فرد باشند، پس: $ab=$ فرد $\Rightarrow$ $a=$ فرد ، $b=$ فرد

در مثال قبل ثابت کردیم مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases}a^2=8q+1\\ b^2=8q'+1\end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a^2+b^2 &= 8q+1+8q'+1\\ &=8q+8q'+2=8(q+q')+2\\ &=2(\underbrace{4(q+q')+1}_{k})=2k=\text{زوج}\end{aligned}$$

اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از این فرض (که فرض خلف نامیده می‌شود) و فرض اولیه و حقایقی که از قبل درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا متضاد با فرض اولیه می‌رسیم.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ اگر n^2 عددی گنگ باشد، آن‌گاه n نیز عددی گنگ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n گنگ نباشد (فرض خلف)، در نتیجه n گویاست. می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، گویاست. پس $n\times n=n^2$ نیز گویاست. این نتیجه با فرض اولیهٔ مسئله که « n^2 گنگ است» متضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و n گنگ خواهد بود.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ معکوس هر عدد گنگ، گنگ است.**

پاسخ ابتدا مسئله را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم: اگر x گنگ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است. برای اثبات فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس $\frac{1}{x}$ گویا است.

بنابراین برابر عدد گویای ناصفری مانند $\frac{a}{b}$ است که $b\neq 0$ و a.

$$\frac{1}{x}=\frac{a}{b} \Rightarrow x=\frac{b}{a}=\text{گویا}$$

یعنی x هم گویا است و این با فرض اولیهٔ مسئله در تضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب ۵ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۵ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n مضرب ۵ نباشد (فرض خلف) در نتیجه از تقسیم n بر ۵، باقی‌ماندهٔ غیرصفر خواهیم داشت: $n=5q+r$ ، $r=1$ یا ۲ یا ۳ یا ۴

$$\Rightarrow n^2=25q^2+10qr+r^2$$

$$=5(\underbrace{5q^2+2qr}_{k})+r^2=5k+r^2$$

اگر $r=1$ باشد، آن‌گاه: $n^2=5k+1$

اگر $r=2$ باشد، آن‌گاه: $n^2=5k+4$

اگر $r=3$ باشد، آن‌گاه: $n^2=5k+9=\underbrace{5k+5}_{5(k+1)}+4=5k'+4$

اگر $r=4$ باشد، آن‌گاه: $n^2=5k+16=\underbrace{5k+15}_{5(k+3)}+1=5k'+1$

پس n^2 در تقسیم بر ۵، دارای باقی‌ماندهٔ غیرصفر است؛ یعنی n^2 نمی‌تواند مضرب ۵ باشد و این نتیجه با فرض اولیه متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات بازگشتی

دو حکم را معادل یا هم‌ارز می‌گوییم هرگاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت. گاهی برای اثبات یک حکم، آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که با حکم اولیه هم‌ارز باشد و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به حکمی برسیم که درستی آن معلوم است.

به این ترتیب بازگشت از حکم آخر، درستی حکم اولیه را نتیجه می‌دهد. به این روش اثبات، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

مثال **به روش بازگشتی ثابت کنید؛ اگر $x,y>0$ آن‌گاه $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$**

پاسخ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2$$

کل نامساوی را در xy ضرب می‌کنیم. چون x و y هر دو مثبت هستند، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند. بنابراین مسئله ثابت شده است.

مثال **به روش بازگشتی نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:**

$$\mathbf{x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx}$$

پاسخ کل نامساوی را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم: $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2\geq 2xy+2yz+2zx$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(x^2+z^2-2zx)+(y^2+z^2-2yz)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند پس مسئله ثابت شده است.

مثال **اگر n یک عدد طبیعی باشد آیا زوج‌بودن n و زوج‌بودن n^2 هم‌ارزند؟ چرا؟**

پاسخ بله هم‌ارزند. برای اثبات باید نشان دهیم: n زوج است. $\Leftrightarrow$ n^2 زوج است.

مرحلهٔ ۱: فرض می‌کنیم n زوج باشد، آن‌گاه:

$$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(\underbrace{2k^2}_{k'})=2k'$$

پس n^2 هم زوج است.

مرحلهٔ ۲: فرض می‌کنیم n^2 زوج باشد آن‌گاه نشان می‌دهیم n نیز زوج است. به روش برهان خلف؛ فرض می‌کنیم n زوج نباشد. (فرض خلف) پس n فرد است.

$$n=2k+1 \Rightarrow n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$$

$$=2(\underbrace{2k^2+2k}_{k'})+1=2k'+1$$

یعنی n^2 نیز فرد می‌شود که با فرض زوج‌بودن n^2 متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

تعریف عادکردن: گوییم عدد صحیح a $(a\neq 0)$، عدد b را می‌شمارد و می‌نویسیم « $a \mid b$ »، هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد، به طوری که $b=aq$.

$$\begin{cases}a\mid b\\ a\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \exists q\in\mathbb{Z}; b=aq$$

در این صورت می‌گوییم b بر a بخش‌پذیر است.

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد، می‌نویسیم $a \nmid b$. مثلاً $۴ | ۱۲$ زیرا عدد صحیح $q = ۳$ وجود دارد که $۱۲ = ۳ \times ۴$، ولی $۴ \nmid ۱۰$ زیرا عدد صحیحی مانند q وجود ندارد که $۴q = ۱۰$ در واقع $\frac{۱۰}{۴} \notin \mathbb{Z}$.

مثال: با توجه به تعریف عادکردن، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۹ | ۷۲ \Leftrightarrow ۷۲ = \cdots\cdots \times \cdots\cdots$

ب) $-۷ | ۴۲ \Leftrightarrow \cdots\cdots = \cdots\cdots \times (-۷)$

پ) $۳۹ = ۳ \times ۱۳ \Rightarrow ۳ | \cdots\cdots$ و $\cdots\cdots | ۳۹$

پاسخ:

الف) $۹ | ۷۲ \Leftrightarrow ۷۲ = ۹ \times ۸$

ب) $-۷ | ۴۲ \Leftrightarrow ۴۲ = -۶ \times (-۷)$

پ) $۳۹ = ۳ \times ۱۳ \Rightarrow ۳ | ۳۹$ و $۱۳ | ۳۹$

مثال: ابتدا نشان دهید که $۲^{۷} | ۲^{۱۱}$ و سپس ثابت کنید برای هر $m,n \in \mathbb{N}$، که $m \le n$ باشد، آن‌گاه: $a^m | a^n$

پاسخ: $۲^{۷} | ۲^{۱۱}$ زیرا عدد صحیح $q = ۲^{۴}$ وجود دارد به طوری که: $۲^{۱۱} = ۲^{۷} \times ۲^{۴}$

برای هر $m,n \in \mathbb{N}$ که $m \le n$ باشد، $n - m$ صفر یا عددی طبیعی و $q = a^{n-m}$ عددی صحیح است، به طوری که: $a^n = a^m \times a^{n-m}$

پس $a^m | a^n$.

ویژگی‌های عادکردن

ویژگی ۱: اگر a، عدد b را عاد کند، آن‌گاه هر مضرب صحیحی از b را نیز عاد می‌کند.

$$\begin{cases} a | b \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a | mb$$

مثلاً

$$\begin{cases} ۴ | ۸ \\ -۳ \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow ۴ | -۳ \times ۸$$

نتیجهٔ مهم:

$$\begin{cases} a | b \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a | b^n$$

(اگر a، عدد b را عاد کند، آن‌گاه هر توان طبیعی از b را نیز عاد می‌کند.)

مثلاً: $۴ | ۸$ در نتیجه $۴ | ۸^{۳}$.

تذکر مهم: اگر $a | bc$ آن‌گاه لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت $a | b$ یا $a | c$. به مثال‌های زیر دقت کنید.

$۴ | ۴ \times ۸$ و $۴ | ۴$ و $۴ | ۸$

$۴ | ۴ \times ۳$ و $۴ | ۴$ و $۴ \nmid ۳$

$۴ | ۲ \times (-۲)$ و $۴ \nmid ۲$ و $۴ \nmid -۲$

نکته: طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان در عدد صحیح k ضرب کرد و برعکس می‌توان عدد ناصفر و صحیح k را از طرفین ساده نمود؛ یعنی:

$$\begin{cases} a | b \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow ka | kb$$

اثبات:

$a | b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; b = aq$

طرفین را در $k \in \mathbb{Z}$ ضرب می‌کنیم: $kb = kaq \Rightarrow ka | kb$

برعکس، فرض می‌کنیم $ka | kb$، در نتیجه: $\exists q \in \mathbb{Z}; kb = kaq$

k را از طرفین ساده می‌کنیم. $\Rightarrow b = aq \Rightarrow a | b$

ویژگی ۲: خاصیت تعدی در رابطهٔ عادکردن برقرار است. $a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$

اثبات:

$a | b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; b = aq$

$b | c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}; c = bq'$

در نتیجه: $c = (aq)q' = a(qq') = aq'' \Rightarrow c = aq'' \Rightarrow a | c$

تذکر: گفتیم که اگر $a | b$، آن‌گاه a هر توان طبیعی از b را نیز عاد می‌کند؛ یعنی $a | b^n \ (n \in \mathbb{N})$.

اثبات این ویژگی به کمک خاصیت تعدی نیز انجام می‌پذیرد:

$a | b \wedge b | b^n \xrightarrow{\text{تعدی}} a | b^n$

ویژگی ۳: اگر a دو عدد صحیح متفاوت را عاد کند، آن‌گاه a جمع و تفریق آن دو عدد را نیز عاد می‌کند. $a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$

اثبات:

$a | b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; b = aq$

$a | c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}; c = aq'$

در نتیجه با جمع و تفریق طرفین تساوی‌ها داریم:

$b \pm c = aq \pm aq' = a(q \pm q') = aq''$

$\Rightarrow b \pm c = aq'' \Rightarrow a | b \pm c$

تذکر: اگر $a | b + c$ آن‌گاه همواره **نمی‌توان** نتیجه گرفت: $a | b$ یا $a | c$. به مثال زیر توجه کنید. $۲ | ۳ + ۵$ و $۲ \nmid ۳$ و $۲ \nmid ۵$

ویژگی ۴: اگر $a | b$ و $b \neq ۰$، آن‌گاه $|a| \le |b|$

اثبات: $a | b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; b = aq$

چون $b \neq ۰$، پس $q \neq ۰$.

چون $q \in \mathbb{Z}$ پس $|q|$ عددی طبیعی است؛ بنابراین $|q| \ge ۱$.

$۱ \le |q| \xrightarrow{\times |a|} |a| \le |a||q| \Rightarrow |a| \le |b|$

نتیجه: اگر $a | b$ و $b | a$ آن‌گاه $|a| = |b|$

اثبات: طبق ویژگی ۴ و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a | b \Rightarrow |a| \le |b| \\ b | a \Rightarrow |b| \le |a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a| = |b|$$

نکته: سه خاصیت مهم دیگر از رابطهٔ عادکردن عبارت‌اند از:

۱) طرفین دو رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هم ضرب کرد.

$$\begin{cases} a | b \\ c | d \end{cases} \Rightarrow ac | bd$$

۲) طرفین رابطهٔ عادکردن را می‌توان به توان عدد طبیعی n رساند.

$$\begin{cases} a | b \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a^n | b^n$$

۳) اگر $a | b$ و $a | c$ آن‌گاه برای هر $m,n \in \mathbb{Z}$: $a | mb \pm nc$

مثال: اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $۸m + ۳$ و $۱۱m + ۴$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید: $a = \pm ۱$.

پاسخ: $۸m + ۳$ و $۱۱m + ۴$ بر a بخش‌پذیرند، پس: $a | ۸m + ۳, a | ۱۱m + ۴$

برای این‌که ضریب m در سمت راست هر دو رابطهٔ عادکردن بالا، برابر شوند، طرف راست رابطهٔ اول را در ۱۱ و طرف راست رابطهٔ دوم را در ۸ ضرب می‌کنیم: (ویژگی ۱)

$a | ۸m + ۳ \xrightarrow{\times ۱۱} a | ۸۸m + ۳۳$

$a | ۱۱m + ۴ \xrightarrow{\times ۸} a | ۸۸m + ۳۲$

طبق ویژگی تفاضل (ویژگی ۳) داریم: $a | (۸۸m + ۳۳) - (۸۸m + ۳۲) \Rightarrow a | ۱$

اما عدد ۱ فقط بر دو عدد ± ۱ بخش‌پذیر است. در نتیجه $a = \pm ۱$.

مثال: اگر P عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a | p$، در این صورت نشان دهید $a = ۱$ یا $a = p$.

اثبات: طبق تعریف عدد اول، p فقط بر ۱ و خودش بخش‌پذیر است؛ یعنی فقط:

$۱ | p \ , \ p | p$

طبق فرض a عددی طبیعی و $a | p$ در نتیجه $a = ۱$ یا $a = p$.