THE 10 GEOMETRY

STANISLAV SMIRNOV

Stanislav Konstantinovich Smirnov is a Russian mathematician currently working at the University of Geneva. He was awarded the Fields Medal in 2010. His research involves complex analysis, dynamical systems and probability theory

PETER SCHOLZE

Peter Scholze is a German mathematician known for his work in algebraic geometry. He has been a professor at the University of Bonn since 2012, and director at the Max Planck Institute for Mathematics since 2018. He has been called one of the leading mathematicians in the world.

PIERRE DELIGNE

Pierre René, Viscount Deligne is a Belgian mathematician. He is known for work on the Weil conjectures, leading to a complete proof in 1973. He is the winner of the 2013 Abel Prize, 2008 Wolf Prize, 1988 Crafoord Prize, and 1978 Fields Medal.

VLADIMIR VOEVODSKY

Vladimir Alexandrovich Voevodsky was a Russian-American mathematician. His work in developing a homotopy theory for algebraic varieties and formulating motivic cohomology led to the award of a Fields Medal in 2002.

GAJ INTERNATIONAL PUBLICATIONS

پتر شولتسه
متولد ۱۹۸۷

Peter Scholze

درس اول: ترسیم‌های هندسی

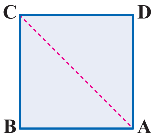
درس دوم: استدلال

Geometric Drawings

1 CHAPTER

آزمون اول ترسیم‌های هندسی

ص ۱۰ تا ۱۶ هندسه دهم



1 در مربع ABCD به ضلع $۲\sqrt{۲}$ چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از قطر AC برابر ۱/۵ واحد باشد؟

۱) هیچ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) بی‌شمار

2 چند نقطه روی قطرهای ذوزنقهٔ ABCD وجود دارد که فاصلهٔ آن از دو قاعده یکسان باشد؟

۱) نامشخص ۲) ۲

۳) ۴ ۴) بی‌شمار

3 دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۷/۵ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۵/۱ واحد از A و به فاصلهٔ ۲/۶ واحد از B باشد؟

۱) یک ۲) دو

۳) چهار ۴) هیچ

4 پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است. در رسم عمود منصف AB دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $۳a-۱$ باز کرده‌ایم تا به مراکز A و B کمان‌هایی رسم کنیم. برای این‌که ترسیم به درستی انجام گیرد. حدود a کدام باید باشد؟

۱) $۰<a<۲$ ۲) $\frac{۱}{۳}<a<۲$

۳) $a>۲$ ۴) $a>\frac{۱۱}{۳}$

5 در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۶ و ۲ عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

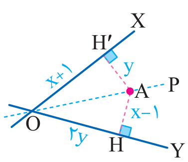
۱) ۷/۵ ۲) ۸

۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$

6 در رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط، از کدام ترسیم استفاده می‌شود؟

۱) ترسیم خطی موازی یک خط ۲) ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن

۳) ترسیم عمودمنصف یک پاره‌خط ۴) ترسیم نیمساز



7 زاویهٔ XOY مطابق شکل مفروض است. اگر OP نیمساز زاویهٔ XOY باشد، اندازهٔ OA کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۵ ۴) $۲\sqrt{۵}$

8 چند مثلث دوبه‌دو ناهم‌نهشت به اضلاع ۸ , ۱۱ , ۱۵ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

NOTE

9 نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸ واحد از خط Δ قرار دارد. چند مثلث متساوی‌الساقین ناهم‌نهشت به رأس A وجود دارد که قاعدهٔ آن‌ها منطبق بر خط Δ بوده و مساحت آن‌ها برابر ۴۸ باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) هیچ
۴) بی‌شمار

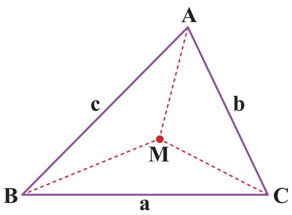
10 اگر محیط یک مثلث برابر با ۷۲ باشد و اندازهٔ اضلاع مثلث برابر نباشند آن‌گاه اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۴۰
۲) ۳۶
۳) ۳۰
۴) ۲۴

11 محیط مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۲۴ است. کدام عدد می‌تواند اندازهٔ ساق این مثلث باشد؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۱۳

12 اگر در شکل مقابل $MA+MB+MC=۱۲$ باشد، آن‌گاه حاصل $a+b+c$ کدام عدد ممکن است باشد؟



۱) ۱۶
۲) ۲۴
۳) ۸
۴) ۱۲

13 پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ M قطع کند. سپس به مرکز M و شعاع ۴ کمانی می‌زنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ چگونه است؟

۱) لوزی با محیط ۲۰
۲) مربع به مساحت ۱۲
۳) متوازی الاضلاع به محیط ۲۴
۴) مستطیل به قطرهای ۶ و ۸

14 پاره‌خط AB به طول ۸ مفروض است؛ عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع ۵ کمانی می‌زنیم تا عمود منصف را در C و D قطع کند. چهار ضلعی $ACBD$ کدام است؟

۱) مستطیل به قطر ۸ و ضلع ۵
۲) لوزی به محیط ۲۰
۳) لوزی با محیط ۱۰
۴) مستطیل به مساحت ۴۸

15 پاره‌خط AB به طول ۱۰ مفروض است؛ از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB دایره‌ای به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. یکی از قطرهای دایره آن را در C و D قطع می‌کند. چهار ضلعی $ACBD$:

۱) متوازی‌الاضلاع به قطرهای ۵ و ۱۰
۲) مستطیل به ضلع ۱۰
۳) مستطیل به قطر ۱۰
۴) مربع به ضلع ۵

16 در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و به شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع کدام است؟ (داخل ـ ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

NOTE

درس اول: نسبت و تناسب در هندسه

درس دوم: قضیه تالس

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

درس چهارم: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

Thales theorem

ولادیمیر وایودسکی
متولد ۱۹۶۶

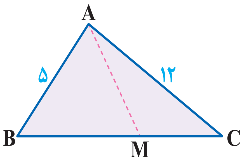
Vladimir Voevodsky

آزمون سوم

نسبت و تناسب در هندسه

ص ۳۰ تا ۳۳ هندسه دهم

39 در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مطابق شکل، پاره‌خط AM آن را به دو مثلث با محیط‌های برابر تقسیم می‌کند، نقطهٔ M وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟



۱) $\frac{۳}{۵}$　　۲) $\frac{۳}{۱۰}$

۳) $\frac{۲}{۹}$　　۴) $\frac{۴}{۵}$

40 اگر $\frac{۱}{۸}=\frac{۳x-y}{y-x}$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$　　۲) $\frac{۹}{۲۵}$

۳) $\frac{۲}{۵}$　　۴) $\frac{۴}{۵}$

41 اگر $\frac{y}{y+۳}=\frac{x}{x+۵}$ باشد، حاصل $\frac{۳x-y}{x+۲y}$ کدام است؟

۱) $۱\frac{۱}{۱۱}$　　۲) $\frac{۱۲}{۱۳}$

۳) $۱\frac{۲}{۱۱}$　　۴) $\frac{۱۰}{۱۱}$

42 اگر $\frac{x}{۳}=y=z+۱$ و داشته باشیم $x+۳y+z=۲۰$، آن‌گاه مقدار z کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۷

۳) ۴　　۴) ۲

43 روی پاره‌خط AB به طول ۱۲، دو نقطه M و N را طوری انتخاب می‌کنیم که رابطهٔ $۳=\frac{BN}{AN}=\frac{MA}{MB}$ بین آن‌ها برقرار باشد. اندازهٔ پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۶

۳) ۴　　۴) ۳

44 دو پاره‌خط به طول‌های x و $x-۱۳$ مفروض‌اند. اگر طول پاره‌خطی که واسطهٔ هندسی بین آن‌ها است، ۶ واحد باشد، طول پاره‌خط بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۹

۳) ۶　　۴) ۸

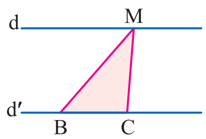
NOTE

45 در مثلثی به اضلاع $a = ۶, b = ۳, c = ۵$ حاصل $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c}$ کدام است؟ [منظور از h_a ارتفاع وارد بر ضلع a است]

۱) $\frac{۱۳}{۸}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$

۳) $\frac{۸}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶}$

46 در شکل مقابل دو خط d, d' موازی‌اند. با تغییر نقطهٔ M روی خط d ، محیط و مساحت مثلث MBC چگونه تغییر می‌کند؟



۱) محیط ثابت و مساحت ثابت

۲) محیط متغیر و مساحت ثابت

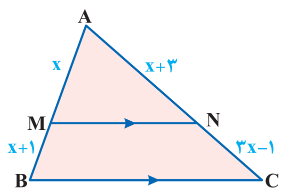
۳) محیط متغیر و مساحت متغیر

۴) محیط ثابت و مساحت متغیر

آزمون چهارم — قضیهٔ تالس

ص ۳۴ تا ۳۷ هندسه دهم

47 در شکل مقابل MN موازی قاعدهٔ BC است، مقدار x کدام است؟



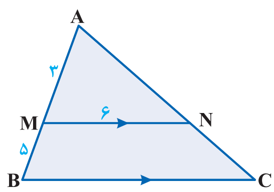
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

48 در شکل مقابل MN با BC موازی است، اندازهٔ ضلع BC کدام است؟



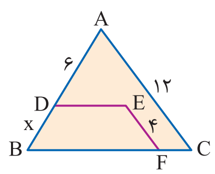
۱) ۱۸

۲) ۱۹

۳) ۱۲

۴) ۱۶

49 در مثلث ABC از نقطهٔ E پاره‌خط DE را به موازات BC و پاره‌خط EF را به موازات AC رسم کرده ایم. با توجه به اعداد روی شکل مقدار x کدام است؟



۱) ۲

۲) ۴

۳) ۳/۵

۴) ۳

50 در مثلث ABC ، اضلاع AB=۴ و AC=۶ و BC=۷ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اندازهٔ BD کدام است؟ (خارج ـ ۹۸)

۱) ۷/۵ ۲) ۸

۳) ۸/۵ ۴) ۹

NOTE

استانیسلاف اسمیرنف
متولد ۱۹۷۰
Stanislav Smirnov

آزمون هفتم | چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها

ص ۵۴ تا ۶۴ هندسه دهم

104 در یک n ضلعی، تعداد قطرها ۸ برابر تعداد اضلاع است. اختلاف تعداد اضلاع و اقطار این چندضلعی کدام است؟

۱) ۱۲۴ ۲) ۱۱۹

۳) ۱۳۳ ۴) ۱۲۷

105 یک چندضلعی در کدام حالت ممکن است محدب **نباشد**؟

۱) تمام نقاط پاره‌خطی که هر دو نقطهٔ دلخواه درون چندضلعی را به هم وصل می‌کند، درون آن باشد.

۲) هر زاویهٔ داخلی کمتر از نیم صفحه باشد.

۳) سایر رأس‌ها در یک طرف خطی باشند که بر ضلع آن منطبق است.

۴) یک قطر، آن را به دو چندضلعی محدب تقسیم کند.

106 حاصل ضرب تعداد اضلاع و اقطار یک n ضلعی برابر ۵۴ است. مجموع زوایای داخلی این n ضلعی چند درجه است؟

۱) ۳۶۰° ۲) ۷۲۰°

۳) ۵۴۰° ۴) ۹۰°

107 مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی بدون یکی از آن‌ها ۲۵۷۰° است. تعداد قطرهای این n ضلعی کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۷۷

۳) ۱۰۴ ۴) ۱۱۹

108 کدام یک از موارد زیر الزاماً یک متوازی‌الاضلاع را **مشخص نمی‌کند**؟

۱) یک چهارضلعی که اضلاع رو به روی آن دو به دو برابرند. ۲) یک چهارضلعی که زاویه‌های مقابل دو به دو برابرند.

۳) یک چهارضلعی که قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند. ۴) یک چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی دارد.

109 کدام یک از تعاریف زیر الزاماً یک مستطیل را **مشخص نمی‌کند**؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که دو قطر برابر دارد. ۲) چهارضلعی که قطرهای برابر دارد و دو ضلع مقابل آن، هم اندازه است.

۳) متوازی‌الاضلاعی که دو زاویهٔ قائمه دارد. ۴) چهارضلعی که ۳ زاویهٔ قائمه دارد.

110 یک چهارضلعی در کدام صورت قطعاً لوزی است؟

۱) قطرهایش عمود باشند. ۲) قطرهایش برابر باشند.

۳) قطرهایش منصّف ودو ضلع مجاور برابر ۴) قطرهایش منصّف و دو ضلع مقابل برابر

NOTE

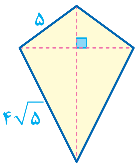
111 **کدام چهارضلعی الزاماً یک مربع را مشخص می‌کند؟**

۱) چهارضلعی که در آن قطرها برابر و نیمساز زوایا باشند.
۲) چهارضلعی که در آن دو ضلع مقابل برابر و قطرها عمود باشند.
۳) چهارضلعی که در آن قطرها عمود و نیمساز زوایا باشند.
۴) چهارضلعی که در آن اضلاع مجاور عمود و قطرها منصّف هم باشند.

112 **در ذوزنقه متساوی‌الساقین کدام ویژگی الزاماً برقرار نیست؟**

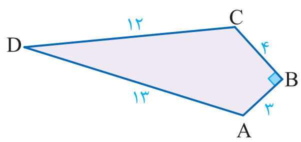
۱) قطرها با هم برابرند.
۲) زاویه‌های مقابل مکمل هم هستند.
۳) زاویه‌های مجاور برابرند.
۴) دو ضلع غیرموازی برابرند.

113 **در یک کایت اندازهٔ اضلاع $۴\sqrt{۵}$ و ۵ و اندازهٔ قطر بزرگ ۱۱ است اندازهٔ قطر کوچک کدام است؟**



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۵

114 **اگر در چهارضلعی ABCD مطابق شکل، وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهارضلعی به‌دست آمده یک .... و مساحت آن .... است.**



۱) ذوزنقه ـ ۱۸
۲) متوازی‌الاضلاع ـ ۳۶
۳) متوازی‌الاضلاع ـ ۱۸
۴) کایت ـ ۱۶

115 **در چهارضلعی ABCD وسط دو ضلع غیرمجاور و وسط دو قطر آن، رأس‌های یک لوزی است. الزاماً کدام نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی مفروض، درست است؟** (داخل ـ ۹۸)

۱) دو ضلع غیرمجاور دیگر، برابرند.
۲) دو قطر عمود برهم‌اند.
۳) دو ضلع شامل رأس‌های لوزی، برابرند.
۴) دو ضلع غیر مجاور، موازی‌اند.

116 **در یک چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم وسط‌های اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده‌ایم و چهارضلعی MNPQ حاصل شده است. از وصل کردن وسط‌های اضلاع چهارضلعی MNPQ، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟**

۱) لوزی
۲) مستطیل
۳) ذوزنقه
۴) مربع

117 **وسط‌های اضلاع یک ذوزنقه قائم‌الزاویه را به هم وصل کرده‌ایم تا چهارضلعی جدیدی پدید آید. از تقاطع نیمسازهای داخلی این چهارضلعی جدید، کدام شکل ایجاد می‌شود؟**

۱) مربع
۲) مستطیل
۳) ذوزنقه
۴) لوزی

118 **در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\widehat{A}=۹۰^\circ)$ اگر اندازهٔ میانه و ارتفاع وارد بر وتر به‌ترتیب ۳ و $۲\sqrt{۲}$ باشد، اندازهٔ ضلع متوسط کدام است؟**

۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۶\sqrt{۲}$

NOTE

4
CHAPTER

درس اول: خط، نقطه و صفحه

درس دوم: تفکر تجسمی

Space visualization

پی‌یر دلین
متولد ۱۹۴۴

Pierre Deligne

آزمون نهم خط ، نقطه و صفحه

ص ۷۸ تا ۸۶ هندسه دهم

154 دو خط d_1 و d_2 موازی‌اند. اگر خط Δ خط d_1 را قطع کند، وضعیت Δ و d_2 چگونه است؟

۱) متقاطع ۲) متنافر

۳) غیرمتنافر ۴) غیرموازی

155 خط d با صفحهٔ P موازی است. اگر خط d' خط d را قطع کند، وضعیت خط d' نسبت به صفحه P چگونه است؟

۱) موازی ۲) متقاطع

۳) غیرمنطبق ۴) غیرمتقاطع

156 دو صفحهٔ P_1 و P_2 موازی‌اند و P_1 با صفحهٔ Q متقاطع است در این صورت:

۱) P_2 ممکن است با Q موازی باشد. ۲) P_1 و P_2 با Q فصل مشترک‌های موازی دارند.

۳) P_1 و P_2 با Q فصل مشترک های غیرموازی دارند. ۴) P_1 و P_2 با Q فصل مشترک‌های غیرمتنافر دارند.

157 اگر خط d با صفحهٔ P متقاطع باشد، وضعیت خط d نسبت به خطوط منطبق بر صفحهٔ P کدام است؟

۱) غیرمتنافر ۲) غیرموازی

۳) غیرمتقاطع ۴) غیرعمود

158 اگر دو خط d و d' در نقطهٔ A مشترک باشند و خط d در نقطهٔ B صفحهٔ P را قطع کرده باشد $(B\neq A)$ وضعیت خط d' نسبت به صفحهٔ P چگونه است؟

۱) ناموازی ۲) نامتقاطع

۳) نامنطبق ۴) نامشخص

159 اگر یکی از دو خط متنافر .... باشد دیگری .... است.

۱) موازی صفحه‌ای ـ غیرموازی با آن صفحه ۲) غیرمتقاطع با صفحه ـ متقاطع با آن صفحه

۳) منطبق بر صفحه‌ای ـ غیرمنطبق بر آن صفحه ۴) متقاطع با صفحه‌ای ـ غیرمتقاطع با آن صفحه

160 اگر صفحه‌های P_1 , P_2 , P_3 دو به دو متقاطع باشند، فصل مشترک دو به دوی آن‌ها کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) نقطه ۲) یک خط

۳) دو خط موازی ۴) سه خط موازی

161 دو صفحهٔ P و Q در خط Δ مشترک‌اند و d موازی Δ است در این صورت ....

۱) d با هر دو صفحه موازی است ۲) d حداقل با یکی از صفحه‌ها موازی است

۳) d حداقل بر یکی از صفحه‌ها منطبق است ۴) d منطبق بر هر دو صفحه است

162 دو خط d و d' بر صفحهٔ P عمودند. وضعیت d و d' نسبت به هم چگونه است؟

۱) موازی ۲) متقاطع

۳) موازی یا متنافر ۴) نامشخص

NOTE

163 دو صفحهٔ P_1 و P_2 بر صفحهٔ Q عمودند. وضعیت P_1 و P_2 نسبت به هم چگونه است؟

۱) موازی
۲) متقاطع
۳) عمود
۴) هر وضعی ممکن است.

164 دو خط D و D' موازی‌اند. اگر خط Δ بر خط D عمود باشد وضعیت D' و Δ کدام است؟

۱) متقاطع
۲) متنافر
۳) عمود
۴) موازی

165 نقطهٔ A خارج خط d مفروض است از نقطهٔ A .... می‌توان رسم کرد.

۱) یک خط عمود بر d
۲) بی‌شمار خط عمود بر d
۳) بیشمار صفحه عمود بر d
۴) یک صفحه به موازات d

166 نقطهٔ A خارج از صفحهٔ P مفروض است. از A .... می‌توان رسم کرد.

۱) یک خط به موازات P
۲) بی‌شمار صفحه عمود بر P
۳) یک صفحهٔ عمود بر P
۴) بی‌شمار خط عمود بر P

167 اگر دو خط d_1 و d_2 متنافر باشند .... که شامل یکی از آن‌ها بوده و موازی دیگری باشد.

۱) هیچ صفحه‌ای وجود ندارد
۲) دقیقاً یک صفحه وجود دارد
۳) حداقل یک صفحه وجود دارد
۴) بی‌شمار صفحه وجود دارد

168 اگر خط d غیرموازی و غیرعمود بر صفحه P باشد .... که شامل خط d و عمود بر صفحه P باشد.

۱) هیچ صفحه‌ای وجود ندارد
۲) دقیقاً یک صفحه وجود دارد
۳) دقیقاً دو صفحه وجود دارد
۴) بی‌شمار صفحه وجود دارد

169 نقطهٔ A و خط d و صفحهٔ P مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطهٔ A موازی خط d و عمود بر صفحهٔ P، در کدام حالت، تعداد جواب‌ها، بی‌شمار است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $d \cap P = d$
۲) $d \cap P \neq \varnothing$
۳) $d \parallel P$
۴) $d \perp P$

170 خط d و صفحهٔ P و نقطهٔ A در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطهٔ A، موازی صفحهٔ P و متقاطع با خط d، در کدام وضعیت، خط و صفحه مفروض، تنها یک جواب دارد؟ (خارج - ۹۸)

۱) الزاماً عمود
۲) منطبق
۳) موازی
۴) متقاطع

171 اگر خط d با صفحهٔ P موازی باشد، هر صفحهٔ غیر موازی با P و گذرنده از d .... (خارج - ۹۱)

۱) می‌تواند عمود بر d باشد.
۲) می‌تواند عمود بر P باشد.
۳) الزاماً فصل مشترکی با P و عمود بر d دارد.
۴) الزاماً فصل مشترکی با P و موازی با d دارد.

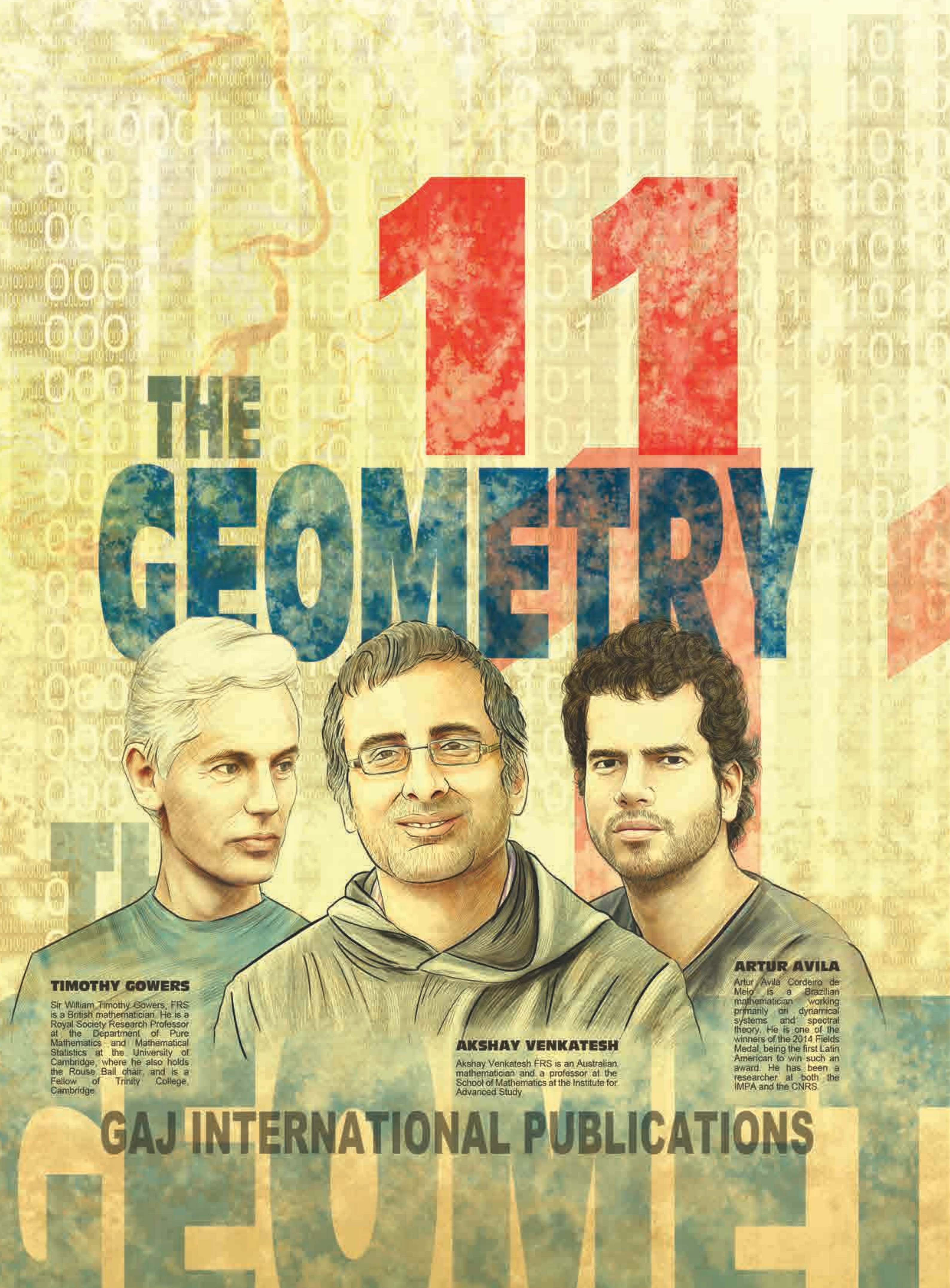
172 صفحهٔ P شامل نقطهٔ A و خط D است. خط گذرا از A و متقاطع با هر دو خط D و Δ در کدام حالت وجود **ندارد**؟ (خارج - ۸۵)

۱) خط Δ موازی صفحهٔ P باشد.
۲) خط Δ صفحهٔ P را در A قطع کند.
۳) خط Δ درون صفحهٔ P باشد.
۴) خط Δ عمود بر صفحهٔ P باشد.

173 صفحهٔ P و خط D و نقطهٔ A مفروض‌اند. صفحهٔ گذرا بر نقطهٔ A و عمود بر صفحهٔ P و موازی خط D در کدام حالت موجود ولی یکتاست؟ (داخل - ۸۵)

۱) D موازی P باشد.
۲) D عمود بر P باشد.
۳) نقطهٔ A درون خط P باشد.
۴) نقطهٔ A روی خط D باشد.

NOTE


THE GEOMETRY 11
TIMOTHY GOWERS
Sir William Timothy Gowers, FRS is a British mathematician. He is a Royal Society Research Professor at the Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics at the University of Cambridge, where he also holds the Rouse Ball chair, and is a Fellow of Trinity College, Cambridge
AKSHAY VENKATESH
Akshay Venkatesh FRS is an Australian mathematician and a professor at the School of Mathematics at the Institute for Advanced Study
ARTUR AVILA
Artur Avila Cordeiro de Melo is a Brazilian mathematician working primarily on dynamical systems and spectral theory. He is one of the winners of the 2014 Fields Medal, being the first Latin American to win such an award. He has been a researcher at both the IMPA and the CNRS
GAJ INTERNATIONAL PUBLICATIONS

Circle

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره

درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

آکشای ونکاتش
متولد ۱۹۶۴

Akshay Venkatesh

آزمون یازدهم — مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

ص ۱۰ تا ۱۷ هندسه یازدهم

203 فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره‌ای به شعاع $۲x+۱$ برابر با $۵-۳x$ است. اگر نقطهٔ A خارج این دایره باشد، حدود x کدام است؟

۱) $۱<x<۳$　　۲) $x\leq ۶$

۳) $x>۶$　　۴) $۱\leq x<۶$

204 کمترین و بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ A تا دایرهٔ C به‌ترتیب برابر ۳ و ۷ است. شعاع دایره کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴ یا ۵　　۲) ۲ یا ۵

۳) ۲ یا ۴　　۴) ۴ یا ۶

205 فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O,۷-۲x)$ تا خط d برابر $x+۱$ است. به ازای کدام مقدار x خط d در ۲ نقطه دایره را قطع می‌کند؟

۱) ۵　　۲) $\sqrt{۵}$

۳) ۲　　۴) $\sqrt{۲}$

206 فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O,۴)$ تا خط d برابر ۵ است. کمترین فاصلهٔ نقاط دایره از خط d کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۱

۳) ۹　　۴) ۲/۵

207 در دایرهٔ $C(O,۵)$ فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر AB برابر ۴ است. طول وتر AB چقدر است؟

۱) ۴　　۲) ۱

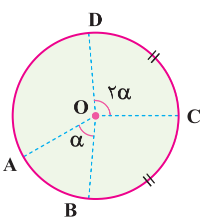
۳) ۳　　۴) ۶

208 نقطهٔ P وسط یکی از شعاع‌های دایرهٔ $C(O,۶)$ قرار دارد. طول کوتاه‌ترین وتر دایره که از نقطهٔ P می‌گذرد، چقدر است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$　　۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۴\sqrt{۵}$　　۴) ۶

209 مطابق شکل، اگر O مرکز دایره و کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CD}$ هم‌اندازه و $\overset{\frown}{AD}=۱۳۰^\circ$ باشد، مقدار α چند درجه است؟



۱) ۵۸

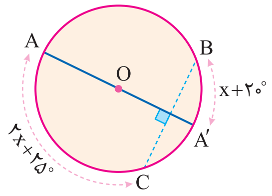
۲) ۴۱

۳) ۵۳

۴) ۴۶

NOTE

210 در شکل زیر AA' قطر عمود بر وتر BC است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ چقدر است؟



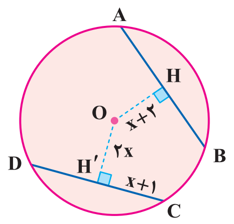
۱) ۱۲۵°

۲) ۱۲۰°

۳) ۱۳۵°

۴) ۱۳۰°

211 در شکل مقابل اگر $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ باشد، شعاع دایره چقدر است؟



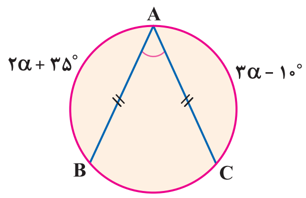
۱) ۵

۲) $۲\sqrt{۷}$

۳) $۲\sqrt{۶}$

۴) ۶

212 در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ A کدام است؟



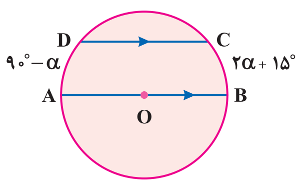
۱) ۴۵°

۲) ۵۵°

۳) ۴۰°

۴) ۶۰°

213 در شکل زیر AB قطر دایره است و $AB \parallel CD$، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{CD}$ چقدر است؟



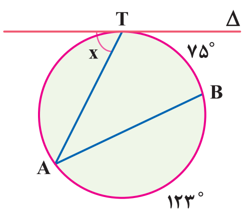
۱) ۶۵°

۲) ۷۵°

۳) ۵۰°

۴) ۶۰°

214 در شکل زیر خط Δ در نقطهٔ T بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ x چقدر است؟



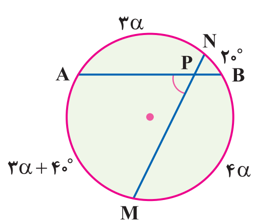
۱) ۷۹°

۲) ۸۱°

۳) ۷۴°

۴) ۶۷°

215 مطابق شکل، دو وتر MN و AB از دایرهٔ $C(O,R)$ در نقطهٔ P متقاطع‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{P}M$ چقدر است؟



۱) ۹۰°

۲) ۷۵°

۳) ۸۰°

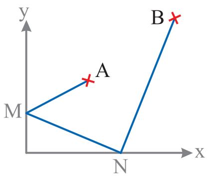
۴) ۸۵°

NOTE

299 دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d قرار دارند. برای پیداکردن نقطهٔ M روی خط d که $MA+MB$ کمترین مقدار ممکن باشد کدام تبدیل به کار می‌رود؟

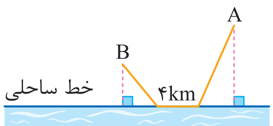
۱) بازتاب ۲) دوران
۳) انتقال ۴) تجانس

300 نقاط $A\left|\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}9\\11\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین اندازه خط شکسته AMNB، کدام است؟ (داخل ـ ۹۸)



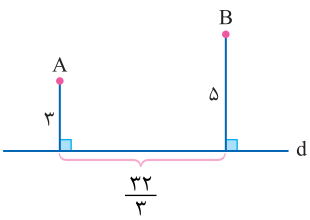
۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

301 در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به‌طوری که ۴ کیلومتر آن در امتداد خط ساحلی باشد برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن از کدام تبدیل‌ها استفاده شود؟



۱) دوران و بازتاب
۲) بازتاب و انتقال
۳) دوران و تجانس
۴) انتقال و دوران

302 در شکل زیر نقطهٔ M را روی خط d طوری به دست می‌آوریم که $AM+BM$ کمترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟

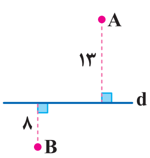


۱) ۷
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

303 در شکل زیر قرار است جاده‌ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از آن در امتداد خط ساحل باشد. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن چقدر است؟

۱) ۳۵
۲) ۲۶
۳) ۳۲
۴) ۲۹

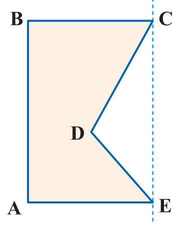
304 در شکل مقابل اگر نقطهٔ M روی خط d باشد، آن‌گاه حداکثر مقدار $|MA-MB|$ کدام است؟



۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) $۴\sqrt{۱۰}$
۳) ۱۳
۴) ۱۲

NOTE

305 در شکل زیر اگر بازتاب رأس D نسبت به امتداد پاره‌خط CE را D' بنامیم، آن‌گاه کدام گزینه در مورد محیط و مساحت پنج‌ضلعی‌های $ABCDE$ و $ABCD'E$ درست است؟



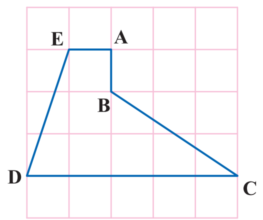
۱) محیط‌ها و مساحت‌های دو شکل برابرند.

۲) محیط‌ها برابرند ولی مساحت شکل جدید بیشتر است.

۳) محیط و مساحت شکل جدید بیشتر است.

۴) محیط شکل قبلی بیشتر و مساحت شکل جدید بیشتر است.

306 در شکل زیر طول ضلع مربع‌های صفحهٔ شطرنجی برابر یک است. اگر رأس B را نسبت به ضلع AC بازتاب دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم، مساحت پنج‌ضلعی $AB'CDE$ چقدر از مساحت پنج‌ضلعی $ABCDE$ بیشتر خواهد بود؟



۱) ۶

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۴

307 دایرهٔ $C(O,R)$ و پاره‌خط AB $(AB<2R)$ مفروض‌اند. برای رسم وتری در دایره که موازی و مساوی با AB باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) دوران　　۲) تجانس

۳) انتقال　　۴) بازتاب

308 اگر d و d' دو خط موازی و A نقطه‌ای بین آن‌ها باشد، برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که رأس‌های B و C روی d,d' باشند، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) تجانس　　۲) دوران

۳) انتقال　　۴) بازتاب

309 برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به رأس A که رأس B از آن روی خط مفروض d و رأس C از آن روی یک دایره باشند، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

۱) بازتاب　　۲) دوران ۴۵

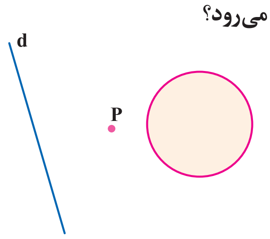
۳) تجانس　　۴) دوران 90°

310 در رسم بزرگ‌ترین مربع ممکن داخل مثلث ABC به‌طوری که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد. از کدام تبدیل هندسی استفاده می‌شود؟ (خارج ـ ۹۸)

۱) انتقال　　۲) تجانس

۳) بازتاب　　۴) دوران

311 در شکل زیر برای رسم خطی گذرنده از P که دایره را در M و خط d را در N قطع کند و $PM=2PN$ کدام تبدیل به کار می‌رود؟



۱) انتقال

۲) دوران 180°

۳) تجانس

۴) بازتاب

NOTE

3 CHAPTER

Longitudinal relations in the triangle

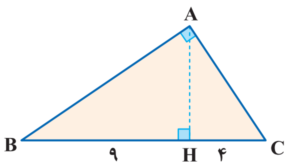
تیموثی گاورز
متولد ۱۹۶۳

Timothy Gowers

آزمون شانزدهم — قضیهٔ سینوس‌ها

ص ۶۲ تا ۶۵ هندسه یازدهم

312 در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، AH ارتفاع نظیر وتر است. مساحت مثلث چقدر است؟



۱) ۲۸
۲) ۳۹
۳) ۳۶
۴) ۲۶

313 طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای $x+2, x+1, x$ است. مقدار سینوس کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث چقدر است؟

۱) ۰/۸
۲) ۰/۷۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۵

314 در مثلث ABC با $BC=2$ ، $\hat{B}=75^\circ$ ، $\hat{C}=60^\circ$ طول ضلع AB چقدر است؟

۱) $\sqrt{6}$
۲) $2\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{3}$
۴) ۳

315 در مثلث ABC با $\hat{B}=45^\circ$ ، $\hat{C}=60^\circ$ ، $AC=6$ طول ضلع BC کدام است؟

۱) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$
۲) $3(\sqrt{3}+1)$
۳) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+2)$
۴) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

316 در مثلث ABC اگر $a=\sqrt{2}$ و همچنین $\hat{A}=2\hat{B}$ باشد، نوع مثلث کدام است؟

۱) قاوئم الزاویهٔ متساوی‌الساقین
۲) قائم‌الزاویه
۳) متساوی‌الساقین
۴) منفرجه الزاویه

317 اگر در مثلثی رابطهٔ $\sin^2 B+\sin^2 C+\cos^2 A=1$ برقرار باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $\hat{A}=90^\circ$
۲) $a=b=c$
۳) $b=c$
۴) $\hat{B}+\hat{C}=120^\circ$

318 در مثلثی با اضلاع ۸ ,۵ ,۵ شعاع دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۴
۲) $\frac{25}{8}$
۳) ۳
۴) $\frac{25}{6}$

NOTE

319 اگر شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی در مثلثی برابر ۱۵ , ۱۰ , ۳ باشد، شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث چقدر است؟

۱) ۶/۵
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۷/۵

آزمون هفدهم — قضیهٔ کسینوس‌ها

ص ۶۶ تا ۶۹ هندسه یازدهم

320 در مثلث ABC با $\widehat{A}=۶۰^\circ$, $b=۳$, $c=۸$ طول ضلع BC کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$
۲) ۷
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) ۹

321 در مثلث ABC با اضلاع $\sqrt{۵}$, $۲\sqrt{۲}$, ۳ اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث چقدر است؟

۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) $\cos^{-۱}(\frac{۲}{۳})$
۴) $\cos^{-۱}(\frac{۳}{۵})$

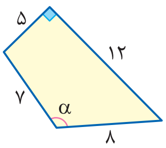
322 اگر در مثلثی رابطهٔ $b^۲=a^۲+c^۲+\sqrt{۲}ac$ برقرار باشد، زاویهٔ B چقدر است؟

۱) ۹۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۳۵°
۴) ۱۵۰°

323 مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ است. اگر b=۸ و c=۵ طول ضلع متوسط a کدام است؟ (خارج ـ ۹۲)

۱) $۵\sqrt{۲}$
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۳۹}$
۴) $\sqrt{۴۱}$

324 در چهار ضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود بر هم‌اند، $\sin\alpha$ کدام است؟ (خارج ـ ۹۸)

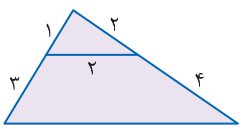


۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

325 اگر اندازهٔ اضلاع مثلث ABC را با a , b , c نشان دهیم، در کدام گزینه مثلث ABC، زاویهٔ منفرجه دارد؟

۱) $c=۹, b=۶, a=۴$
۲) $c=۱۰, b=۸, a=۷$
۳) $c=۴, b=۷, a=۶$
۴) $c=۳, b=۴, a=۵$

326 در شکل روبه‌رو، اندازه ضلع بزرگ‌تر چهارضلعی کدام است؟ (داخل ـ ۹۸)



۱) $۲\sqrt{۱۰}$
۲) $۲\sqrt{۱۱}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۵\sqrt{۲}$

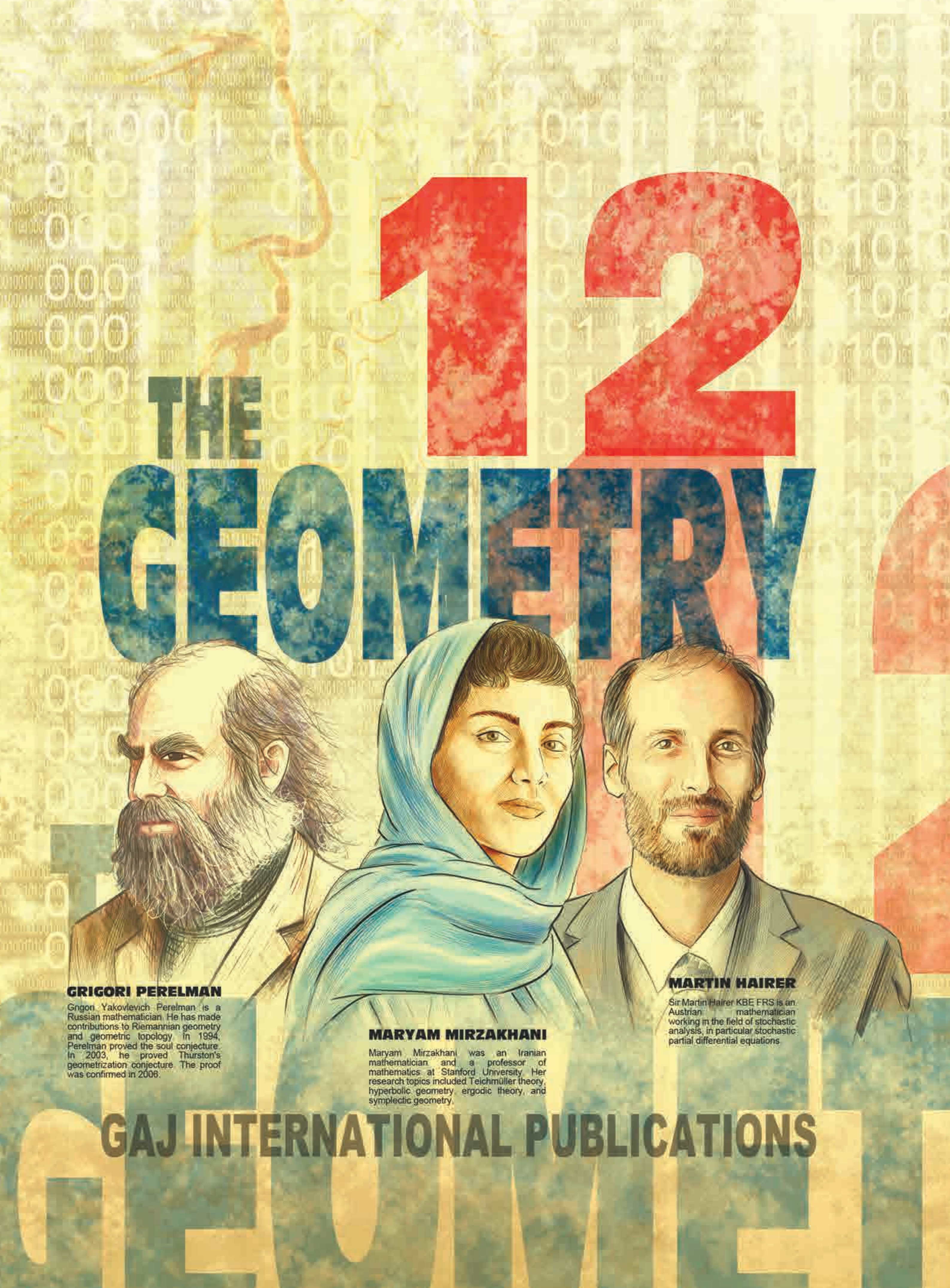
327 در مثلثی با اضلاع ۳ , ۵ , ۶ طول کوتاه‌ترین میانه چقدر است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt{۶}$
۳) ۳
۴) $۲\sqrt{۲}$

328 در مثلثی با اضلاع x , ۵ , ۲x اگر مجموع مربعات میانه‌ها برابر $\frac{۱۰۵}{۲}$ باشد، محیط مثلث چقدر است؟

۱) ۱۷
۲) ۱۵
۳) ۱۲
۴) ۱۴

NOTE


12
THE
GEOMETRY
GRIGORI PERELMAN
Grigori Yakovlevich Perelman is a Russian mathematician. He has made contributions to Riemannian geometry and geometric topology. In 1994, Perelman proved the soul conjecture. In 2003, he proved Thurston's geometrization conjecture. The proof was confirmed in 2006.
MARYAM MIRZAKHANI
Maryam Mirzakhani was an Iranian mathematician and a professor of mathematics at Stanford University. Her research topics included Teichmüller theory, hyperbolic geometry, ergodic theory, and symplectic geometry.
MARTIN HAIRER
Sir Martin Hairer KBE FRS is an Austrian mathematician working in the field of stochastic analysis, in particular stochastic partial differential equations.
GAJ INTERNATIONAL PUBLICATIONS

CHAPTER 1

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

Matrix and Applications

مارتین هایرر
متولد ۱۹۷۵

Martin Hairer

آزمون بیستم — ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ص ۱۰ تا ۲۱ هندسه دوازدهم

356 در ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & x & 5\\ 3 & -1 & 4 & y\\ 7 & 8 & 9 & x-2\end{bmatrix}$ اگر درایهٔ سطر اول و ستون سوم از درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگ‌تر باشد، حاصل $\sum_{j=i}^{4} a_{3j}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ‏ ‏ ۲) ۳۷ ‏ ‏ ۳) ۳۴ ‏ ‏ ۴) ۳۵

357 اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ مفروض باشد، به‌طوری‌که برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$، برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2+j$، در این صورت ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}6 & 7\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ ‏ ‏ ۲) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 6\end{bmatrix}$ ‏ ‏ ۳) $\begin{bmatrix}2 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ ‏ ‏ ۴) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 4\end{bmatrix}$

358 اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}a-1 & a-2\\ b+3 & b-2\end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱- ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ۳) ۳ ‏ ‏ ۴) ۵

359 به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix}x & -1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\\ y & 1\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟ (خارج ـ ۹۸)

۱) $x=1, y=-7$ ‏ ‏ ۲) $x=2, y=-7$ ‏ ‏ ۳) $x=2, y=-5$ ‏ ‏ ۴) $x=1, y=-5$

360 اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-y & 5\\ 2 & z-2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & x+y\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۹ ‏ ‏ ۲) ۸ ‏ ‏ ۳) ۱۰ ‏ ‏ ۴) ۱۱

NOTE

361 اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{2\times 2}$, $b_{ij}=i^2+j^2$ حاصل $2A-B+I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

362 اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2x & -1 \\ x+1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$ و درایهٔ سطردوم و ستون اول از ماتریس AB برابر ۷ باشد، درایهٔ سطرسوم و ستون اول از BA کدام است؟

۱) ۱۱

۲) ۹

۳) ۷

۴) ۱۳

363 اگر $A=[i-j]_{2\times 3}$ و $B=[i+j]_{4\times 2}$ و i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون باشد، مجموع درایه‌های سطراول ماتریس BA کدام است؟

۱) ۶-

۲) ۶

۳) ۵-

۴) ۵

364 اگر A, B, C, D چهار ماتریس مربعی و هم‌مرتبه و I ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن‌ها باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $ABC+ADC=A(B+D)C$

۲) $AC+C=(A+I)C$

۳) $BA+AC=A(B+C)$

۴) $BC-2B=B(C-2I)$

365 اگر A, B, C ماتریس‌های 2×2 و $BC=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $(AB+2B)(CA+C)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$

366 اگر i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون و $AB+BA=[i+j]_{2\times 2}$ و $A-B=[i^2-j]_{2\times 2}$ باشد، حاصل A^2+B^2 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

367 اگر دو ماتریس $A=[i+mj]$ و $B=\begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ برابر باشند، $m+x$ کدام است؟

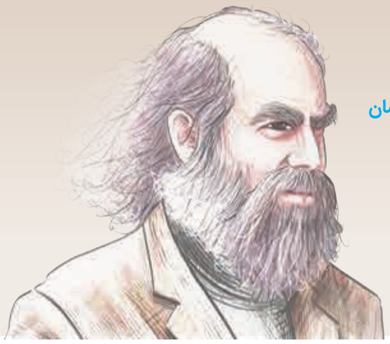
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۲

NOTE



گریگوری پرلمان
متولد ۱۹۶۶

Introduction to conic sections

درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

درس دوم: دایره

درس سوم: بیضی و سهمی

2
CHAPTER

Grigori Perelman

آزمون بیست و دوم آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

ص ۳۴ تا ۳۹ هندسه دوازدهم

430 مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟

۱) موازی یک مولد ۲) موازی محور

۳) عمود بر یک مولد ۴) گذرا از نقطهٔ تلاقی محور و مولد

431 مقطع یک سطح مخروطی با صفحه‌ای که از رأس سطح مخروطی عبور نکند و عمود بر محور سطح مخروطی باشد، کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی

۳) سهمی ۴) نقطه

432 مقطع یک سطح مخروطی با صفحه‌ای که عمود بر محور سطح مخروطی نبوده و با مولد نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی

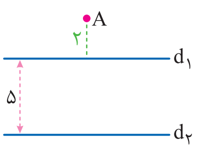
۳) سهمی ۴) هذلولی

433 سطح مقطع یک کره به شعاع ۵ با یک صفحه که به فاصلهٔ ۲ واحد از مرکز کره آن را قطع کند، کدام است؟

۱) بیضی ۲) سهمی

۳) دایره ۴) نامشخص

434 دو خط موازی d_1 , d_2 به فاصلهٔ ۵ واحد از هم و نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d_1 مفروض‌اند چند نقطه در صفحه وجود دارد که از d_1 , d_2 به یک فاصله و از A به فاصلهٔ ۶ واحد باشد؟



۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

435 معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ $A(2,0)$ و خط $x=-2$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $y^2=8x$ ۲) $x^2+y^2=4$

۳) $y=2x$ ۴) $x=4$

آزمون بیست و سوم دایره

ص ۴۰ تا ۴۶ هندسه دوازدهم

436 طول قطر دایرهٔ $9(x-1)^2+9(y+2)^2=36$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۳

NOTE

437 دایرهٔ $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$ ....

۱) بر محور ox مماس است
۲) محور yها را در دو نقطه قطع می‌کند
۳) محور x را قطع نمی‌کند
۴) محور x را در دو نقطه قطع می‌کند

438 دایرهٔ $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۸$ در کدام نواحی محورهای مختصات واقع است؟

۱) سوم و چهارم
۲) دوم و سوم
۳) اول و چهارم
۴) هر چهار ناحیه

439 مساحت محدود به دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۳=۰$ کدام است؟

۱) ۴π
۲) ۲π
۳) π
۴) ۳π

440 به‌ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $(a^۲-۲)x^۲+۲y^۲-۲x+۴y=۰$ یک دایره است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ±۲
۴) $\varnothing$

441 به ازای چند مقدار m معادلهٔ $۲x^۲+(m^۲-۲)y^۲+۴x-۲m=۰$ مربوط به یک دایره است ؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بیش از دو

442 دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x=۰$ و $x^۲+y^۲+۴x=۵$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) مماس داخل
۲) مماس خارج
۳) متخارج
۴) متقاطع

443 طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ $C_۱: x^۲+y^۲+۲x-۸y+۱=۰$ و $C_۲: x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

444 وضعیت خط $۳x+۴y+۵=۰$ نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۲y=۶$ چگونه است؟

۱) همدیگر را قطع نمی‌کنند.
۲) از مرکز دایره می‌گذرد.
۳) مماس بر دایره است.
۴) متقاطع است و از مرکز دایره نمی‌گذرد.

445 طول وتری که خط $۵x+۱۲y=۱۴$ از دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۸y=۸$ جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

446 نقطهٔ $A=(-۱,۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x-۳y+۱=۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y=۲$ را با کدام طول قطع می‌کند؟ (داخل - ۹۸)

۱) $۳,-۵$
۲) $۲,-۴$
۳) $-۱\pm\sqrt{۲}$
۴) $-۱\pm\sqrt{۳}$

NOTE

مریم میرزاخانی
۱۳۹۶-۱۳۵۶

3 CHAPTER

Vectors

درس اول: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

درس دوم: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

Maryam Mirzakhani

آزمون بیست‌وپنجم — معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

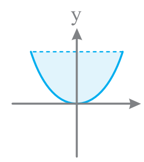
ص ۶۲ تا ۷۶ هندسه دوازدهم

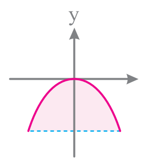
501 نمودار رابطهٔ $\{(x,y) : x=1\ ,\ -1\le y\le 3\}$ به کدام صورت است؟

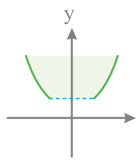
۱) مستطیلی به ابعاد ۲×۴ ۲) یک پاره‌خط افقی به طول ۲

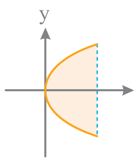
۳) دو خط موازی به فاصلهٔ ۲ ۴) یک پاره‌خط قائم به طول ۴

502 نمودار رابطهٔ $x^2\le y<2$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

503 اگر نقطهٔ $A(m-1, m, 2)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات قرار گرفته باشد، حدود m به کدام صورت باید باشد؟

۱) $m<0$ ۲) $m>1$

۳) $0<m<1$ ۴) $1<m<2$

504 اگر $A(1,2,3)$ و $B(4,-2,4)$ باشد، اندازهٔ تصویر پاره‌خط AB روی صفحهٔ xy کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۵

505 در یک مکعب مستطیل یکی از رأس‌ها مبدأ مختصات و معادلهٔ دو وجه آن $y=5$ و $z=4$ و معادلهٔ یکی از یال‌های آن $\begin{cases}x=2\\z=4\end{cases}$ است، حجم این مکعب مستطیل کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰

۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

506 اگر نقطهٔ $B(0,4,1)$ انتهای بردار $\overrightarrow{AB}=(1,2,-1)$ باشد، فاصلهٔ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور oz از قرینهٔ آن نسبت به صفحهٔ xz کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) ۴ ۴) ۲

507 نقاط $A(5,-4,1)\ ,\ B(-1,2,4)\ ,\ O(0,0,0)$ مفروض هستند و $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$، مقدار $|\overrightarrow{OM}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{11}$

۳) $\sqrt{13}$ ۴) $\sqrt{14}$

NOTE

508 اگر دو بردار $a=(۲,۱,m)$ و $b=(-۱,۲k,۱)$ موازی باشند، آن‌گاه مقدار $m\times k$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) -۲

۳) ۲

۴) $-\frac{۱}{۲}$

509 اگر $a=(۱,۲,۲), b=(۳,-۱,-۱)$ دو بردار باشند، اندازه‌ی قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر روی دو بردار a و b کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$

۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲۲}$

۴) $۲\sqrt{۶}$

510 نقاط $A(۱,۱,۲), B(۳,۱,۰), C(-۱,۴,۷)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌های مثلث باشد، حاصل $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ کدام است؟

۱) $i+۲j+۵k$

۲) $۳i-j-۲k$

۳) $i+j$

۴) $\overline{O}$

511 اگر بردارهای $a=(۱,۲,-۲)$ و $b=(۲,۳,-۱)$ به‌ترتیب معرف نیروی محرکهٔ هواپیما و نیروی باد باشند، بردار مسیر فرود خرچنگی هواپیما کدام است؟

۱) $(۳,۵,-۱)$

۲) $(۱,۱,۱)$

۳) $(۴,۲,۰)$

۴) $(۳,۵,-۳)$

512 اگر a و b دو بردار باشند که $a=(m,۲,-۱)$ و $|b|=\sqrt{۴۱}$ و دو بردار $a+b$ و $a-b$ بر هم عمود باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

513 اگر بردار $a+b$ نیمساز زاویهٔ دو بردار $a=(۷,۴,۱)$ و $b=(۵,۵,m)$ باشد، m کدام است؟

۱) ±۴

۲) ±۳

۳) ±۲

۴) ±۱

514 بردار نیمساز دو بردار $a=(۲,۱,-۲)$ و $b=(-۶,۳,۲)$ کدام است؟ (داخل ـ ۹۲)

۱) $(-۱,۳,۲)$

۲) $(۱,۴,۲)$

۳) $(۱,۴,-۲)$

۴) $(-۱,۴,-۲)$

515 حاصل $|k-j|+|i-k|$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) $\sqrt{۶}$

۴) $۲\sqrt{۲}$

516 اگر a, b, c سه بردار و r یک عدد مثبت باشد، کدام گزینه الزاماً درست نیست؟

۱) $a-(b-c)=(a-b)-c$

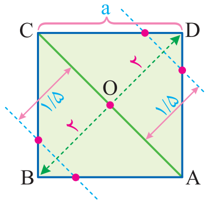
۲) $a-\overline{o}=a$

۳) $r(b-c)=rb-rc$

۴) $a=rb\Rightarrow|a|=r|b|$

NOTE

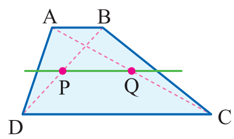
1 ۳ نقاطی که به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از قطر AC قرار دارند، روی دو خط به موازات AC و به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از آن واقع‌اند. حال باید بررسی کنیم که آیا این دو خط نقطهٔ تقاطعی با اضلاع مربع دارند یا نه؟



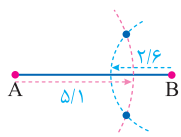
$a=۲\sqrt{۲} \Rightarrow BD=\sqrt{۲}\times(۲\sqrt{۲})=۴ \Rightarrow OD=۲$

چون $۱/۵<OD$ ، پس این دو خط، اضلاع مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

2 ۲ نقاطی که به فاصلهٔ یکسان از دو قاعدهٔ ذوزنقه قرار دارند، روی خطی موازی دو قاعده هستند که فاصلهٔ آن از هرکدام از قاعده‌ها نصف ارتفاع ذوزنقه است. این خط قطعاً قطرهای ذوزنقه را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند. [این خط را خط میانگین ذوزنقه می‌نامند].



3 ۲ با توجه به اینکه فاصلهٔ A و B از هم ۷/۵ واحد است، دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۵/۱ و دایرهٔ به مرکز B و به شعاع ۲/۶ همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس گزینهٔ ۲ صحیح است.

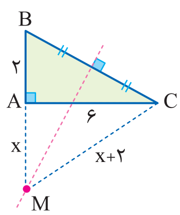


$۲/۶+۵/۱>۷/۵$

4 ۳ باید دهانهٔ پرگار به اندازهٔ بزرگ‌تر از نصف طول پاره‌خط باز شده باشد:

$$۳a-۱>\frac{۱۰}{۲}\Rightarrow ۳a-۱>۵\Rightarrow ۳a>۶\Rightarrow a>۲$$

5 ۲ می‌دانیم هرنقطه روی عمودمنصف از دوسر پاره‌خط به یک فاصله است. بنابراین ازنقطهٔ M به سر دیگر پاره‌خط یعنی C وصل می‌کنیم. در این صورت $MB=MC=x+۲$ خواهد بود. حال در مثلث AMC به‌کمک فیثاغورس x به‌دست می‌آید:



$$(x+۲)^۲=x^۲+۶^۲ \xrightarrow[۶,۸,۱۰]{\text{حدس}} x=۸$$

6 ۳ در ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن [و همچنین از نقطه‌ای خارج آن]، یک بار از ترسیم عمودمنصف و در ترسیم خط موازی یک خط از نقطه‌ای خارج آن، دو بار از ترسیم عمودمنصف استفاده می‌شود.

7 ۴ چون OP نیمساز است، پس $AH=AH'$ و همچنین دو مثلث OAH و OAH' هم‌نهشت هستند؛ یعنی $OH=OH'$. بنابراین:

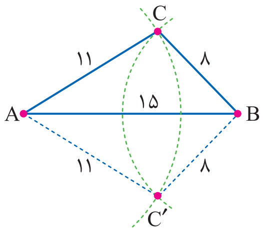
$$\begin{cases} y=x-۱ \\ ۲y=x+۱ \end{cases} \Rightarrow ۲(x-۱)=x+۱ \Rightarrow ۲x-۲=x+۱ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=۲$$

حال اندازهٔ OA به کمک فیثاغورس به‌دست می‌آید:

$$OA=\sqrt{y^۲+(x+۱)^۲}=\sqrt{۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

8 ۲ وقتی اندازهٔ سه ضلع مثلث معلوم باشد، شرط وجود مثلث فقط آن است که اندازهٔ ضلع بزرگ‌تر، از حاصل جمع اندازه‌های دو ضلع دیگر، کوچک‌تر باشد.

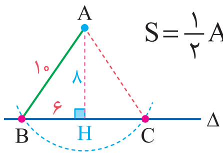
بنابراین با توجّه به این‌که $۱۱+۸>۱۵$ است، دو مثلث ABC و ABC' مطابق شکل با شرایط مسئله وجود دارند، امّا این دو مثلث در حالت تساوی سه ضلع با یکدیگر هم‌نهشتند. پس فقط یک مثلث به اضلاع ۸,۱۱,۱۵ می‌توان رسم کرد.



9 ۱ در این مثلث‌ها AH نقش ارتفاع را دارد، بنابراین اگر قاعده را BC در نظر گرفته و مثلث را رسم شده فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow ۴۸=\frac{۱}{۲}\times ۸\times BC\Rightarrow BC=۱۲$$

بنابراین: $BH=HC=۶$ و $AC=AB=۱۰$



در نتیجه اگر به مرکز A و شعاع ۱۰ کمانی بزنیم، خط Δ را در دونقطهٔ B و C قطع می‌کند و مثلث ABC تنها جواب مسئله است.

10 ۳ اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع مثلث عددی است بزرگ‌تر مساوی ثلث محیط و کوچک‌تر از نصف محیط؛ بنابراین اگر اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع برابر a باشد، آنگاه:

$$\frac{۱}{۳}\times ۷۲<a<\frac{۱}{۲}\times ۷۲\Rightarrow ۲۴<a<۳۶$$

فقط گزینهٔ ۳ در این شرایط صدق می‌کند. دقت کنید که چون اضلاع نابرابر هستند پس a نمی‌تواند برابر ثلث محیط باشد.

11 ۳ به‌طور کلی در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ ساق بین ربع محیط و نصف محیط است؛ بنابراین:

$$\frac{۲۴}{۴}<\text{ساق}<\frac{۲۴}{۲}\Rightarrow ۶<\text{ساق}<۱۲$$

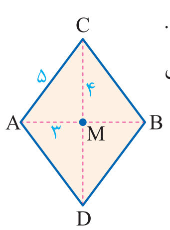
در گزینه‌ها، تنها عدد قابل قبول ۷ است.

12 ۱ اگر M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC و P نصف محیط باشد، آنگاه همواره $p<MA+MB+MC<۲p$ است، از طرفی $a+b+c=۲p$ همان محیط مثلث است، بنابراین:

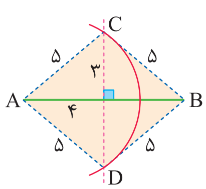
$$p<۱۲<۲p\Rightarrow ۶<p<۱۲\Rightarrow ۱۲<۲p<۲۴$$

پس حاصل $a+b+c$ عددی بین ۱۲ و ۲۴ است. در میان گزینه‌ها فقط گزینهٔ ۱ یعنی ۱۶ در این شرایط صادق است.

13 ۱ این چهارضلعی یک لوزی با قطرهای ۶ و ۸ است. بنابراین اندازهٔ ضلع لوزی ۵، محیط آن ۲۰ و مساحت آن ۲۴ خواهد بود.



14 ۲ چون قطرها عمودمنصف هم هستند این چهار ضلعی یک لوزی به ضلع ۵ و محیط ۲۰ است.



41 ۱ چون نسبتی داده شده و نسبتی خواسته شده، می‌توانیم از عددگذاری استفاده کنیم. ولی مشکل این‌جاست که تناسب داده‌شده دارای یک سمت مجهول و یک سمت معلوم نیست، بنابراین ابتدا آن را کمی ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+5}=\frac{y}{y+3}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{x}{(x+5)-x}=\frac{y}{(y+3)-y}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{5}=\frac{y}{3}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$$

حال می‌توانیم فرض کنیم $x=5$ و $y=3$ است، در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{3x-y}{x+2y}=\frac{(3\times5)-3}{5+(2\times3)}=\frac{12}{11}=\frac{11+1}{11}=1+\frac{1}{11}=1\frac{1}{11}$$

42 ۴ هر چند یک نسبت داده شده، ولی چون نسبتی خواسته نشده، نباید از عددگذاری استفاده کرد، بنابراین از روش ضریب k استفاده می‌کنیم. یعنی:

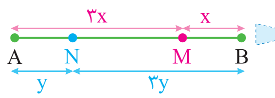
$$\frac{x}{3}=y=z+1=k\Rightarrow\begin{cases}x=3k\\y=k\\z=k-1\end{cases}$$

حال این مقادیر را در معادلهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم تا مقدار k و در نتیجه مقدار z به‌دست آید:

$$3k+3(k)+(k-1)=20\Rightarrow7k=21\Rightarrow k=3\Rightarrow z=3-1=2$$

43 ۲ پاره‌خط‌ها را برحسب دو پارامتر مختلف نشان می‌دهیم و به روی شکل منتقل می‌کنیم:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{BN}{AN}=3\Rightarrow\begin{cases}MA=3x\\MB=x\end{cases},\quad\begin{cases}BN=3y\\AN=y\end{cases}$$



$$\begin{cases}3x+x=12\Rightarrow x=3\\3y+y=12\Rightarrow y=3\end{cases}$$

حال با به دست آمدن مقادیر x و y طول پاره‌خط MN به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$MN=AB-x-y=12-3-3=6$$

44 ۲ باید مربع عدد ۶ با حاصل‌ضرب اعداد x و $13-x$ برابر باشد:

$$6^2=x(13-x)\Rightarrow x^2-13x+36=0\Rightarrow(x-9)(x-4)=0$$

بنابراین برای x دو مقدار ۴ و ۹ به‌دست می‌آید در نتیجه طول پاره‌خط بزرگ‌تر برابر ۹ است.

45 ۴ می‌دانیم نسبت ارتفاع‌ها با نسبت اضلاع رابطه عکس دارد. بنابراین کافی است به‌جای $\frac{h_a}{h_b}$ نسبت $\frac{b}{a}$ و به‌جای $\frac{h_b}{h_c}$ نسبت $\frac{c}{b}$ را قرار دهیم:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}=\frac{3}{6}+\frac{5}{3}=\frac{3}{6}+\frac{10}{6}=\frac{13}{6}$$

46 ۲ باتغییر M روی خط d، اندازهٔ قاعدهٔ BC ثابت می‌ماند. همچنین چون M روی خطی موازی d' (یعنی BC) حرکت می‌کند اندازهٔ ارتفاع نیز ثابت خواهد ماند. بنابراین مساحت هیچ تغییری نخواهد کرد، اما با دورشدن از B و C محیط رفته‌رفته افزایش می‌یابد [کمترین مقدار محیط زمانی حاصل می‌شود که M روی عمودمنصف BC قرار گیرد و مثلث ABC، متساوی‌الساقین شود].

47 ۲ اگر در یک تست اندازهٔ پاره‌خط MN نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، بهتر است از تالس جزءبه‌جزء استفاده کنیم:

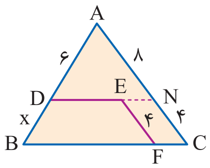
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{x}{x+1}=\frac{x+3}{3x-1}\Rightarrow3x^2-x=x^2+4x+3$$

$$2x^2-5x-3=0\Rightarrow(x-3)(2x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-\frac{1}{2}\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

48 ۴ چون MN جزء داده‌های مسئله است، باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

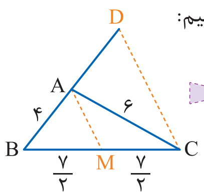
$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{3}{3+5}=\frac{6}{BC}\Rightarrow3BC=48\Rightarrow BC=16$$

49 ۴ همان‌طور که می‌بینید، خطوط موازی وجود دارد ولی مثلثی که در شرایط قضیهٔ تالس صدق کند، وجود ندارد. بنابراین با امتداد دادن DE مثلث ایجاد می‌کنیم. در ضمن چهار ضلعی ENCF که اضلاع دو به‌دو موازی دارد متوازی‌الاضلاع است:



$$DN\|BC\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{6}{x}=\frac{8}{4}\Rightarrow x=3$$

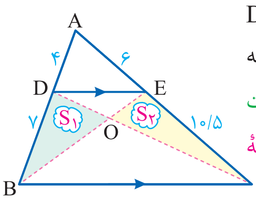
50 ۲ چون صحبت از دو خط موازی است به سراغ تالس می‌رویم و چون BD را می‌خواهد باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:



$$\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow\frac{4}{BD}=\frac{\frac{7}{2}}{7}\Rightarrow BD=8$$

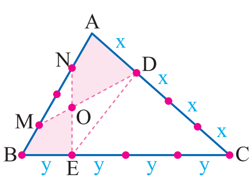
51 ۲ همان‌طورکه در شکل دیده می‌شود طول هر ۴ قطعه روی اضلاع مثلث مشخص است، و معلوم بودن هر ۴ قطعه روی ساق‌های مثلث خبر از عکس تالس می‌دهد [خبرآمد، خبری در راه است!] بنابراین کنترل می‌کنیم ببینیم واقعاً خبری هست یا نه؟!

$$\frac{4}{7}\overset{?}{=}\frac{6}{10/5}\Rightarrow\underbrace{4\times10/5}_{42}=\underbrace{6\times7}_{42}\Rightarrow BC\|DE$$

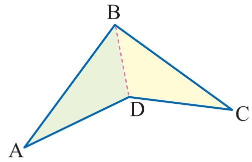


پس در چهارضلعی DECB قاعده‌های DE و BC موازی‌اند، یعنی این چهارضلعی ذوزنقه است. بنابراین مثلث‌های رنگ‌شده، هم‌مساحت هستند. [در هر ذوزنقه مساحت بال‌های پروانهٔ متکی به ساقین با هم برابر است.]

52 ۱ اگر دقت کنیم $\frac{3x}{x}=\frac{3y}{y}$ می‌باشد؛ بنابراین طبق عکس تالس $DE\|AB$ است. پس مثلث‌های ADM و BEN هم ارتفاع هستند. در ضمن قاعده‌های آن‌ها نیز برابر است. پس هم مساحت هستند. در نتیجه اگر مثلث OMN که در هر دوی آن‌ها مشترک است را برداریم، دو چهار ضلعی باقی‌مانده نیز هم مساحت خواهند بود.



۴ **105** اگر یک قطر، چندضلعی را به دو چندضلعی محدب تقسیم کند امکان دارد چندضلعی محدب نباشد. در سایر حالات همواره چندضلعی محدّب است.



۲ **106** اگر تعداد اضلاع را n فرض کنیم خواهیم داشت:

$$n\times\frac{n(n-۳)}{۲}=۵۴\Rightarrow n^{۲}(n-۳)=۱۰۸$$

حال ۱۰۸ را به صورت حاصل‌ضرب یک عدد مربع کامل در یک عدد دیگر تجزیه می‌کنیم: $n^{۲}\times(n-۳)=۶^{۲}\times۳\Rightarrow n=۶$

از طرفی مجموع زوایای داخلی برابر $(n-۲)\times۱۸۰^\circ$ است، بنابراین:

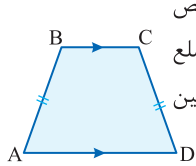
مجموع زوایای داخلی $=۴\times۱۸۰^\circ=۷۲۰^\circ$

۴ **107** مجموع زوایای داخلی باید مضرب ۱۸۰° باشد:

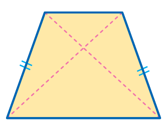
$۲۵۷۰ \div ۱۸۰ = ۱۴$ (باقی‌مانده ۵۰) $\Rightarrow ۵۰^\circ+x=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۱۳۰^\circ$

بنابراین مجموع زوایای داخلی این چندضلعی $۲۵۷۰^\circ+۱۳۰^\circ=۲۷۰۰^\circ=۱۵\times۱۸۰^\circ$ است. یعنی $n-۲=۱۵$ و در نتیجه $n=۱۷$ است. پس تعداد قطرهای آن برابر است با: $\frac{۱۷\times۱۴}{۲}=۱۷\times۷=۱۱۹$

۴ **108** گزینهٔ ۴ الزاماً یک متوازی‌الاضلاع را مشخص نمی‌کند چون یک چهارضلعی که دوضلع آن موازی و دو ضلع آن مساوی باشد، می‌تواند یک ذوزنقه متساوی‌الساقین نیز باشد.



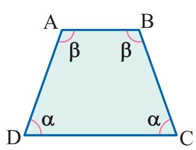
۲ **109** گزینهٔ ۲ الزاماً یک مستطیل را مشخص نمی‌کند چون چهارضلعی که قطرهای برابر دارد و دو ضلع مقابل آن هم اندازه است، می‌تواند یک ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد.



۳ **110** چهارضلعی که قطرهایش منصّف هم باشند قطعاً متوازی‌الاضلاع است و در یک متوازی‌الاضلاع، اگر دو ضلع مجاور با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع تبدیل به یک لوزی خواهد شد.

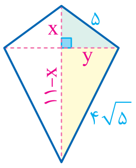
۱ **111** چهارضلعی که قطرهای آن نیمساز زوایا باشد قطعاً لوزی است. حال اگر در یک لوزی قطرها برابر باشد، لوزی خواص مستطیل را پیدا می‌کند و تبدیل به مربع می‌شود. مثال نقض برای گزینه‌های ۲ و ۳ لوزی و برای گزینهٔ ۴ مستطیل است.

۳ **112** در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مطابق شکل مقابل، زاویه‌های مجاور می‌توانند با هم برابر باشند یا مکمل هم باشند، یعنی گزینهٔ ۳ نادرست است اما سایر گزینه‌ها در تمام ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین برقرار هستند:



$\hat{A}=\hat{B}$ $\qquad$ $\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$

۲ **113** اندازهٔ قطر کوچک کایت را ۲y فرض می‌کنیم. می‌دانیم که قطر بزرگ کایت عمود منصف قطر کوچک آن است. حال با توجه به شکل، رابطهٔ فیثاغورس را در دو مثلث رنگ شده می‌نویسیم:



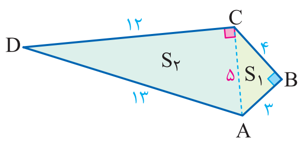
$$\begin{cases}x^{۲}+y^{۲}=۲۵\\(۱۱-x)^{۲}+y^{۲}=۸۰\end{cases}$$

حال طرفین دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$۱۲۱-۲۲x=۵۵\Rightarrow ۲۲x=۶۶\Rightarrow x=۳\Rightarrow y=۴$$

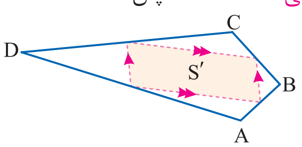
بنابراین اندازهٔ قطر کوچک کایت برابر است با: $d=۲y=۸$

۳ **114** از وصل کردن وسط‌های اضلاع هر چهار ضلعی محدب یا غیر محدب همواره یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود و برای یافتن مساحت متوازی‌الاضلاع مورد نظر باید مساحت چهارضلعی ABCD را به‌دست آوریم. برای این کار ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم. مثلث ABC مثلثی قائم‌الزاویه است پس اندازهٔ قطر AC برابر با ۵ است، در ضمن از آن‌جاکه $۱۳^{۲}=۵^{۲}+۱۲^{۲}$ پس مثلث ADC نیز قائم‌الزاویه است و در نتیجه خواهیم داشت:



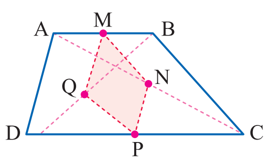
$$\begin{cases}S_{۱}=\frac{۱}{۲}\times۴\times۳=۶\\S_{۲}=\frac{۱}{۲}\times۵\times۱۲=۳۰\end{cases}\Rightarrow S=۶+۳۰=۳۶$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاعی که از وصل کردن وسط‌های هر چهارضلعی محدب به‌دست می‌آید. نصف مساحت چهارضلعی ABCD است پس:

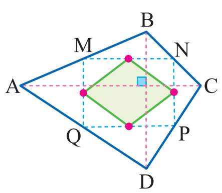


$$S'=\frac{S}{۲}=\frac{۳۶}{۲}=۱۸$$

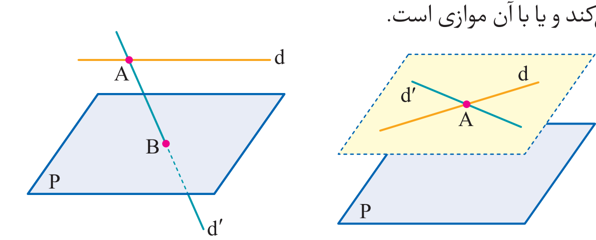
۱ **115** در مثلث ABC نقاط M و N وسط‌های دو ضلع را به هم وصل کرده‌اند، بنابراین MN موازی و نصف ضلع مقابل است یعنی $MN=\frac{۱}{۲}BC$ و به طریق مشابه در مثلث BDC نیز $PQ=\frac{۱}{۲}BC$ است و از طرف دیگر در مثلث‌های ABD و ADC نیز داریم $MQ=NP=\frac{۱}{۲}AD$ حال اگر MNPQ لوزی باشد، به یقین اضلاع آن برابرند و در نتیجه باید $BC=AD$ باشد، یعنی دو ضلع غیر مجاور دیگر چهارضلعی باید برابر باشند.



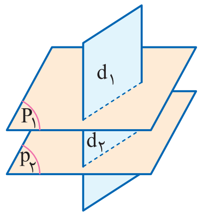
۱ **116** در یک چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم، اگر وسط‌های اضلاع را به هم وصل کنیم، یک مستطیل حاصل می‌شود. حال اگر وسط‌های اضلاع این مستطیل را به هم وصل کنیم، یک لوزی ایجاد می‌شود.



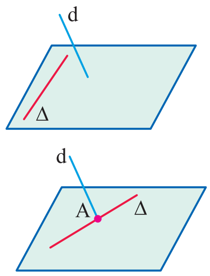
155 ۳ خط d' قطعاً غیرمنطبق بر صفحهٔ P است چون یا صفحهٔ P را قطع می‌کند و یا با آن موازی است.



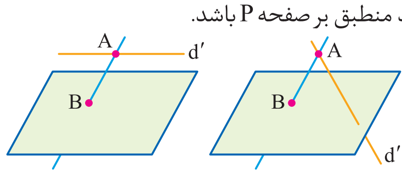
156 ۲ اگر یکی از دو صفحهٔ موازی، صفحه‌ای را قطع کند، دیگری نیز آن را قطع می‌کند و فصل مشترک‌های ایجادشده با هم موازی است.



157 ۲ اگر خط d، صفحهٔ P را قطع کند و خط Δ بر این صفحه منطبق باشد، آن‌گاه d و Δ یا متقاطع اند یا متنافر و هرگز نمی‌توانند موازی باشند زیرا اگر خط Δ با خط d موازی باشد، باید قطعاً صفحهٔ P را قطع کند در حالی که می‌دانیم خط Δ بر صفحهٔ P منطبق است.

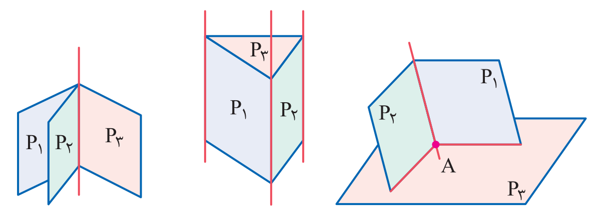


158 ۴ خط d' نمی‌تواند منطبق بر صفحه P باشد.



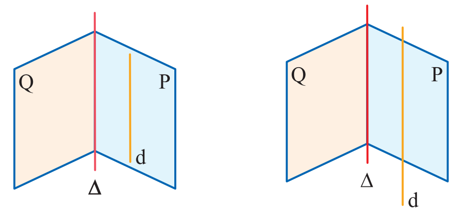
159 ۳ اگر یکی از دو خط متنافر، منطبق بر صفحه‌ای باشد، دیگری قطعاً غیرمنطبق بر آن صفحه است چون دو خط متنافر، هرگز در یک صفحه جای نمی‌گیرند.

160 ۳ تحت هیچ شرایطی دو خط موازی امکان‌پذیر نیست.



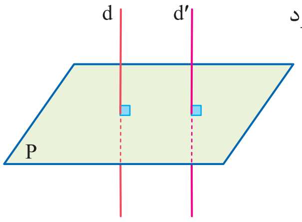
فصل مشترک‌ها از یک نقطه می‌گذرند — هر سه فصل مشترک با هم موازی‌اند — فصل مشترک‌ها برهم منطبق‌اند

161 ۲ خط d یا با هر دو صفحه موازی است یا منطبق بر یک صفحه و با دیگری موازی است یعنی حداقل با یکی از دو صفحه موازی است.

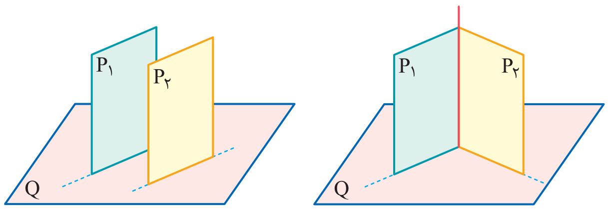


d موازی P و Q — d منطبق بر P و موازی Q

162 ۱ اگر دو خط، بر صفحه‌ای عمود باشند الزاماً با هم موازی‌اند.

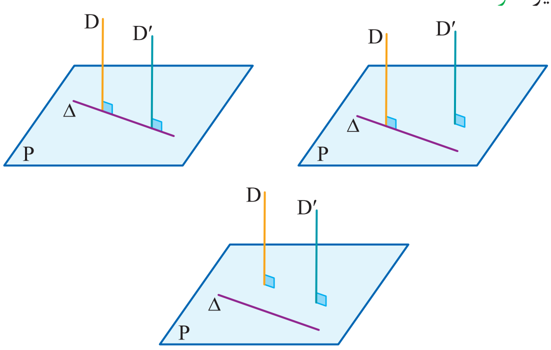


163 ٤ صفحات P_1 و P_2 هر وضعیتی ممکن است نسبت به هم داشته باشند [منظور از هر وضعیتی برای دو صفحه، موازی یا متقاطع است].

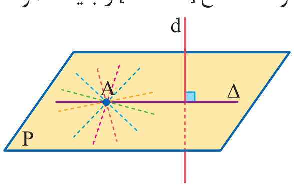


P_1 و P_2 متقاطع‌اند. — P_1 و P_2 موازی‌اند.

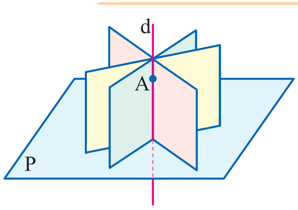
164 ۳ هر خط [یا صفحه‌ای] که بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.



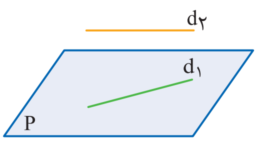
165 ۲ مطابق شکل، از هر نقطه خارج یک خط، بی‌شمار خط عمود بر آن خط می‌توان رسم کرد که یکی از آن‌ها عمود متقاطع [خط Δ] و بقیه، عمود متنافر هستند. این خطوط همگی در صفحه‌ای قرار دارند که از نقطهٔ A می‌گذرد و خط d بر آن عمود است.



166 ۲ از هر نقطهٔ خارج صفحهٔ P بی‌شمار صفحهٔ عمود بر P می‌توان رسم کرد. این صفحات همگی شامل خط d هستند که از A می‌گذرد و عمود بر P است.



167 ۲ اگر دو خط d_1 و d_2 متنافر باشند، تنها یک صفحه وجود دارد که شامل یکی و موازی دیگری باشد.



۴ 209 اندازهٔ کمان‌های $\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}$ برابر ۲α و اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ برابر α است، از طرفی مجموع تمام کمان‌های دایره برابر $۳۶۰°$ است. پس داریم:

$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{AD}=۳۶۰° \Rightarrow \alpha+۲\alpha+۲\alpha+۱۳۰°=۳۶۰°$$

$$\Rightarrow ۵\alpha=۲۳۰° \Rightarrow \alpha=۴۶°$$

۴ 210 عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند. پس:

$$\begin{cases}\widehat{AB}=\widehat{AC}=۲x+۲۵°\\ \widehat{A'B}=\widehat{A'C}=x+۲۰°\end{cases}$$

می‌دانیم AA' قطر دایره است، پس دو کمان $۱۸۰°$ به وجود می‌آورد:

$$\widehat{ACA'}=۱۸۰° \Rightarrow ۲x+۲۵°+x+۲۰°=۱۸۰°$$

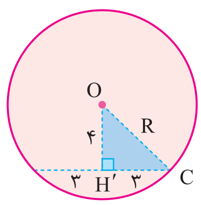
$$\Rightarrow ۳x=۱۳۵° \Rightarrow x=۴۵°$$

$$\widehat{BC}=۲\widehat{A'B}=۲(x+۲۰°)=۲(۴۵°+۲۰°)=۲(۶۵°)=۱۳۰°$$

۱ 211 از تساوی کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$، برابر بودن وترهای آن‌ها نتیجه می‌شود، همچنین می‌دانیم فاصلهٔ مرکز دایره تا این دو وتر نیز برابر است:

$$\widehat{AB}=\widehat{CD} \Rightarrow \begin{cases}AB=CD\\ OH=OH'\end{cases} \Rightarrow x+۲=۲x \Rightarrow x=۲ \Rightarrow CH'=۳$$

حال برای محاسبهٔ شعاع دایره کافی است از C به مرکز دایره وصل کنیم و از رابطهٔ فیثاغورس کمک بگیریم:



$$R=\sqrt{OH'^{۲}+CH'^{۲}}=\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}=۵$$

۲ 212 در هر دایره، کمان‌های محدود به دو وتر مساوی با هم برابرند، بنابراین:

$$\widehat{AB}=\widehat{AC} \Rightarrow ۲\alpha+۳۵°=۳\alpha-۱۰° \Rightarrow \alpha=۴۵° \Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{AC}=۱۲۵°$$

از طرفی مجموع کمان‌های هر دایره $۳۶۰°$ است، بنابراین:

$$\widehat{BC}+۱۲۵°+۱۲۵°=۳۶۰° \Rightarrow \widehat{BC}=۱۱۰°$$

و از آن‌جا که زاویهٔ $\hat{A}$ محاطی است، با نصف کمان مقابل خودش برابر است، پس:

$$\hat{A}=\frac{\widehat{BC}}{۲}=۵۵°$$

۳ 213 وتر CD با قطر AB موازی است، پس کمان‌های $\widehat{AD}$ و $\widehat{BC}$ برابرند:

$$\widehat{AD}=\widehat{BC} \Rightarrow ۹۰°-\alpha=۲\alpha+۱۵° \Rightarrow ۳\alpha=۷۵° \Rightarrow \alpha=۲۵°$$

$$\Rightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC}=۶۵°$$

می‌دانیم قطر دایره کمان $۱۸۰°$ به وجود می‌آورد، پس:

$$\widehat{AD}+\widehat{CD}+\widehat{BC}=۱۸۰° \Rightarrow ۶۵°+\widehat{CD}+۶۵°=۱۸۰° \Rightarrow \widehat{CD}=۵۰°$$

۲ 214 مجموع کمان‌های دایره برابر $۳۶۰°$ است، پس:

$$\widehat{AT}+\widehat{BT}+\widehat{AB}=۳۶۰° \Rightarrow \widehat{AT}=۳۶۰°-۷۵°-۱۲۳°=۱۶۲°$$

زاویهٔ x زاویهٔ ظلی است و نصف کمان درونش است: $x=\frac{\widehat{AT}}{۲}=۸۱°$

۲ 215 مجموع اندازهٔ کمان‌های یک دایره برابر $۳۶۰°$ است، پس داریم:

$$\widehat{AM}+\widehat{MB}+\widehat{BN}+\widehat{AN}=۳۶۰°$$

$$۳\alpha+۴۰°+۴\alpha+۲۰°+۳\alpha=۳۶۰° \Rightarrow ۱۰\alpha=۳۰۰° \Rightarrow \alpha=۳۰°$$

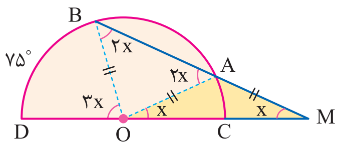
اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{P}M$ برحسب کمان‌های $\widehat{AM}$ و $\widehat{BN}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A\hat{P}M=\frac{\widehat{AM}+\widehat{BN}}{۲}=\frac{(۳\alpha+۴۰°)+۲۰°}{۲}=\frac{۱۳۰°+۲۰°}{۲}=۷۵°$$

۱ 216 اگر فرض کنیم $\widehat{AD}=x$ و $\widehat{BC}=y$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{x+y}{۲}=۷۱°\\ \frac{x-y}{۲}=۲۷°\end{cases} \xrightarrow{+} \frac{x+y+x-y}{۲}=۹۸° \Rightarrow \frac{۲x}{۲}=۹۸° \Rightarrow x=۹۸°$$

۲ 217 از مرکز دایره به نقطهٔ A و B وصل می‌کنیم، بنابراین:



$$MA=OA=OB=R$$

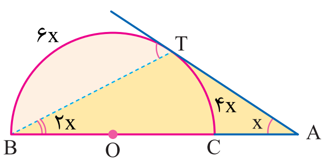
حال اگر زاویهٔ M را برابر با x فرض کنیم چون مثلث AOM متساوی‌الساقین است، بنابراین $A\hat{O}C=x$ خواهد بود. از طرفی زاویهٔ $B\hat{A}O$ زاویهٔ خارجی مثلث OAM است، بنابراین:

$$B\hat{A}O=x+x=۲x$$

مثلث OAB نیز متساوی‌الساقین است پس زاویه‌های مجاور دو ساق برابرند، یعنی $O\hat{B}A=۲x$ است، از طرفی زاویهٔ $B\hat{O}D$ زاویهٔ خارجی مثلث OBM است، بنابراین:

$$B\hat{O}D=۲x+x=۳x \Rightarrow ۳x=۷۵° \Rightarrow x=۲۵°$$

۲ 218 اگر زاویهٔ A را برابر x درنظر بگیریم، زاویهٔ $\hat{B}=۲x$ خواهد بود و از آن‌جا که زاویهٔ $\hat{B}$ زاویهٔ محاطی است، $\widehat{CT}=۴x$ خواهد بود، از طرفی زاویهٔ $\hat{T}$ زاویهٔ خارجی مثلث ABT است، بنابراین:



$$\hat{T}=\hat{A}+\hat{B}=x+۲x=۳x$$

زاویهٔ $\hat{T}$ ظلی است و با نصف کمان درونش برابر است:

$$\hat{T}=\frac{\widehat{BT}}{۲} \Rightarrow \widehat{BT}=۲\hat{T}=۲\times۳x=۶x$$

قطر BC کمان $۱۸۰°$ می‌سازد، بنابراین:

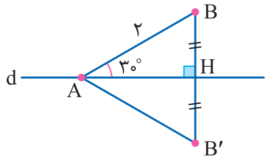
$$\widehat{BT}+\widehat{CT}=۱۸۰° \Rightarrow ۶x+۴x=۱۰x=۱۸۰° \Rightarrow x=۱۸° \Rightarrow \widehat{CT}=۴x=۷۲°$$

۴ 219 تفاضل طول کمان‌های متناظر با زوایای $۳۳°$ و $۷۸°$ با طول کمان $۷۸°-۳۳°=۴۵°$ برابر است، پس کافی است طول کمان $۴۵°$ را در این دایره به‌دست آوریم:

$$L=\frac{۴۵°}{۳۶۰°}(۲\pi\times۶)=\frac{۱}{۸}(۱۲\pi)=\frac{۳\pi}{۲}$$

طول کمان $\alpha°$ از دایره به شعاع R برابر با $L=\frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi R)$ است.

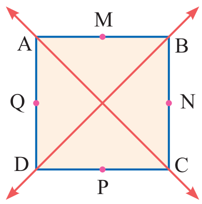
271 ۲ می‌دانیم برای یافتن بازتاب نقطهٔ B نسبت به خط d باید به آن عمود کنیم و به همان اندازه ادامه دهیم. پس با توجه به شکل مقابل و قائمه بودن مثلث ABH خواهیم داشت:



$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{BH}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = 1 \Rightarrow BB' = 2BH = 2$$

از طرفی با توجه به اینکه بازتاب تبدیلی ایزومتری است، هر پاره‌خط با تبدیل یافته‌اش هم‌اندازه است؛ بنابراین $AB' = AB = 2$ در نتیجه محیط مثلث ABB' برابر است با: $AB + BB' + AB' = 2 + 2 + 2 = 6$

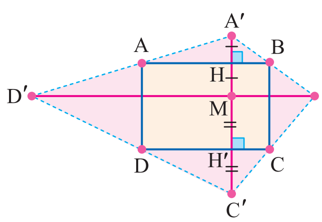
272 ۴ در بازتاب نسبت به قطر AC نقطهٔ M به Q تبدیل می‌شود، پس گزینه‌های ۱ , ۳ درست نیست. در بازتاب نسبت به قطر BD نقطهٔ N به نقطهٔ M تصویر می‌شود، پس گزینهٔ ۲ درست نیست. اما قطر BD عمودمنصف PQ است، یعنی در بازتاب نسبت به قطر BD نقطهٔ P به Q تبدیل می‌شود، پس گزینهٔ ۴ درست است.



273 ۳ خطوط L_1 و L_2 ممکن است متقاطع نیز باشند، بنابراین گزینهٔ ۱ نادرست است. در ضمن در حالتی که L_1 و L_2 موازی هستند، خط d نیمساز زاویهٔ L_1 و L_2 نیست، یعنی گزینهٔ ۲ نیز نادرست است. از طرفی گزینهٔ ۴ تنها در حالتی می‌تواند درست باشد که L_1 و L_2 برهم منطبق باشند؛ پس گزینهٔ ۴ نیز نادرست است. اما اگر یکی از دو خط L_1 یا L_2 با خط d موازی باشد، خط دیگر نیز با آن موازی است بنابراین تنها گزینهٔ ۳ قابل قبول، گزینهٔ ۳ است.

274 ۳ در حالتی که خط و تصویرش متقاطع باشند، محور بازتاب نیمساز زاویهٔ بین دو خط است. پس گزینهٔ ۳ درست است.

275 ۳ نقطهٔ M با بازتاب نسبت به AB و CD روی A' و C' تصویر شده‌است، پس AB عمودمنصف MA' و CD عمود منصف MC' است، بنابراین:



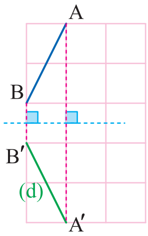
$$A'C' = A'M + MC' = 2MH + 2MH' = 2(MH + MH') = 2AD$$

به همین ترتیب داریم $B'D' = 2AB$ حال می‌توانیم نسبت مساحت‌ها را به دست آوریم:

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}A'C'.B'D'}{AB.AD} = \frac{\frac{1}{2}(2AD)(2AB)}{AB.AD} = 2$$

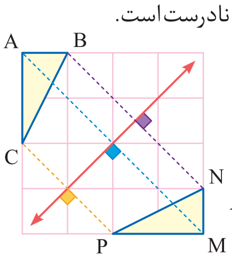
مساحت هر چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم، با نصف حاصل ضرب اندازهٔ قطرها برابر است.

276 ۴ پاره‌خط AB با پاره‌خط (b) هم‌اندازه نیست، پس گزینهٔ ۲ نادرست است. در سایر گزینه‌ها نیز فقط پاره‌خط (d) می‌تواند تصویر پاره‌خط AB باشد، زیرا با توجه به شکل اگر دو سر پاره‌خط (d) را A' و B' نام‌گذاری کنیم، عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AA' و BB' برهم منطبق هستند ولی برای بقیهٔ پاره‌خط‌ها، این اتفاق نمی‌افتد.

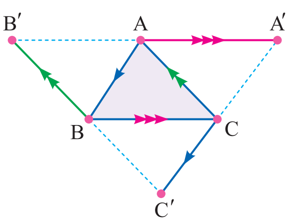


277 ۳ در گزینهٔ ۱ پاره‌خط‌های واصل بین رأس‌های نظیر موازی نیستند. پس گزینهٔ ۱ نادرست است. در گزینهٔ ۲ مثلث‌های ABC و PNQ هم‌نهشت نیستند پس نمی‌توانند بازتاب یافتهٔ یکدیگر باشند بنابراین گزینهٔ ۲ نیز نادرست است. در گزینهٔ ۴ مثلث‌های ABC و FDQ هم جهت هستند پس نمی‌توانند با بازتاب به یکدیگر تبدیل شود، بنابراین گزینهٔ ۴ هم نادرست است.

اما در گزینهٔ ۳ مثلث‌های ABC و MNP هم‌نهشت‌اند ولی هم جهت نیستند و مانند شکل پاره‌خط‌های واصل بین رأس‌های نظیر موازی‌اند پس می‌توانند با بازتاب نسبت به خط d به یکدیگر تبدیل شوند. بنابراین گزینهٔ ۳ صحیح است.

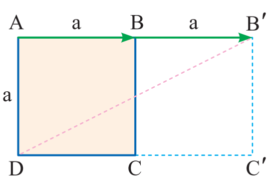


278 ۲ برای انتقال با بردار $\overrightarrow{BC}$، از نقطهٔ A برداری مساوی با بردار $\overrightarrow{BC}$ رسم می‌کنیم، در این صورت نقطهٔ انتهای این بردار یعنی نقطهٔ A'، همان تصویر نقطهٔ A است. به همین ترتیب نقاط B و C را به کمک بردارهای $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم تا به‌ترتیب نقاط B' و C' به دست آید. مطابق شکل، اضلاع مثلث $A'B'C'$ از رأس‌های مثلث ABC می‌گذرد و طول هر ضلع مثلث $A'B'C'$ دو برابر اضلاع مثلث ABC است، پس می‌توان نوشت:



$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 4$$

279 ۳ انتقال یک تبدیل ایزومتری است، پس اگر اندازهٔ ضلع مربع ABCD برابر a باشد، تصویرش تحت انتقال نیز مربعی به ضلع a است و B روی نقطهٔ B' تصویر شده است. بنابراین:



$$DB' = \sqrt{AD^2 + AB'^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$$

280 ۴ باید بردار انتقال از نقطه‌ای روی خط d شروع شود و در نقطه‌ای روی خط d' پایان یابد، ولی در گزینهٔ ۴ چنین حالتی اتفاق نمی‌افتد.

316 ۱ چون رابطهٔ دو ضلع و زاویهٔ روبه‌رو به آن دوضلع مطرح شده از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}b}{\sin ۲\hat{B}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\sqrt{۲}\sin\hat{B}=\sin ۲\hat{B}$$

$$\sqrt{۲}\,\cancel{\sin\hat{B}}=۲\,\cancel{\sin\hat{B}}\cos\hat{B}\Rightarrow\cos\hat{B}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat{B}=۴۵^\circ$$

$$\hat{A}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۴۵^\circ$$

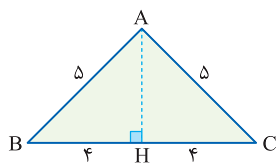
بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

317 ۱ ابتدا باید به جای $\cos^۲ A$ عبارت $۱-\sin^۲A$ را جای‌گذاری کنیم و می‌دانیم اگر رابطهٔ هم درجه‌ای بین اضلاع مثلث برقرار باشد همان رابطه بین سینوس‌های زوایای مثلث نیز برقرار است و برعکس:

$$\sin^۲B+\sin^۲C+(۱-\sin^۲A)=۱\Rightarrow\sin^۲B+\sin^۲C=\sin^۲A$$

چون یک رابطهٔ هم‌درجه بین سینوس‌های زوایای مثلث برقرار است، همان رابطه بین اضلاع مثلث برقرار است: $b^۲+c^۲=a^۲\Rightarrow\hat{A}=۹۰^\circ$

318 ٤ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ابتدا ارتفاع را رسم می‌کنیم و به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ ارتفاع را به دست می‌آوریم:



$$AH=\sqrt{AB^۲-BH^۲}=\sqrt{۵^۲-۴^۲}=۳$$

با معلوم بودن اندازهٔ ارتفاع، مساحت مثلث قابل محاسبه است:

$$S_{ABC}=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{۳\times۸}{۲}=۱۲$$

حال با در دست داشتن مساحت مثلث، می‌توانیم اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی را به دست آوریم:

$$R=\frac{abc}{۴S}=\frac{۵\times۵\times۸}{۴\times۱۲}=\frac{۲۵}{۶}$$

319 ۱ ابتدا به کمک سه شعاع دایره‌های محاطی خارجی، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱۰+۳+۲}{۳۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow r=۲$$

حال می‌توانیم شعاع دایرهٔ محیطی را محاسبه کنیم:

$$r_a+r_b+r_c=r+۴R\Rightarrow ۳+۱۰+۱۵=۲+۴R\Rightarrow ۴R=۲۶\Rightarrow R=۶/۵$$

320 ۲ برای محاسبهٔ طول ضلع BC، از قضیهٔ کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc.\cos\hat{A}$$

$$a^۲=۹+۶۴-۲\times۳\times۸\times\underbrace{\cos۶۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}}=۴۹\Rightarrow a=۷$$

321 ۲ می‌دانیم کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث، روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع است و در بین اعداد داده شده $a=\sqrt{۵}$ کوچک‌ترین ضلع مثلث است، پس داریم:

$$\cos\hat{A}=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}=\frac{۳^۲+(۲\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۵})^۲}{۲\times۳\times۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۲}{۱۲\sqrt{۲}}$$

$$\cos\hat{A}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat{A}=۴۵^\circ$$

322 ۳ عبارت داده شده را با قضیهٔ کسینوس‌ها مقایسه می‌کنیم تا بتوانیم کسینوس زاویهٔ B را به دست آوریم:

1) $b^۲=a^۲+c^۲+\sqrt{۲}ac$ فرض مسئله

2) $b^۲=a^۲+c^۲-۲ac.\cos B$ قضیهٔ کسینوس‌ها

2,1: $\cancel{a^۲}+\cancel{c^۲}+\sqrt{۲}ac=\cancel{a^۲}+\cancel{c^۲}-۲ac.\cos B$

$$\cos B=-\frac{\sqrt{۲}ac}{۲ac}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat{B}=۱۳۵^\circ$$

323 ٤ ابتدا با استفاده از دستور مساحت سینوسی، سینوس زاویه A را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}b\cdot c.\sin A\Rightarrow ۱۶=\frac{۱}{۲}\times۵\times۸\times\sin A\Rightarrow\sin A=\frac{۴}{۵}$$

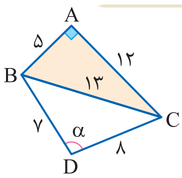
بنابراین داریم: $\cos A=\pm\sqrt{۱-\sin^۲A}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=\pm\frac{۳}{۵}$

دقت کنید که چون a ضلع متوسط است $\cos A$ نمی‌تواند منفی باشد، چون در این صورت $\hat{A}>۹۰^\circ$ بوده و ضلع a قطعاً بزرگ‌ترین ضلع مثلث است. حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها، طول ضلع A به‌دست می‌آید:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲b\cdot c\cdot\cos A\Rightarrow a^۲=۸^۲+۵^۲-۲\times۸\times۵\times\frac{۳}{۵}$$

$$a^۲=۶۴+۲۵-۴۸\Rightarrow a^۲=۴۱\Rightarrow a=\sqrt{۴۱}$$

324 ۳ در مثلث ABC طبق فیثاغورس ضلع BC به دست می‌آید، حال به سراغ قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BCD می‌رویم:



$$۱۳^۲=۷^۲+۸^۲-۲\times۷\times۸\times\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۵۶}{-۲\times۷\times۸}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\alpha=۱۲۰^\circ\Rightarrow\sin۱۲۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

325 ۱ باید در هر گزینه، مربع بزرگ‌ترین ضلع را با مجموع مربعات دو ضلع دیگر مقایسه کنیم:

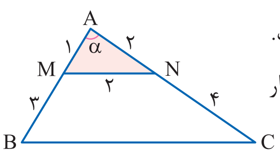
1) $۹^۲>۴^۲+۶^۲\Rightarrow\hat{C}>۹۰^\circ$

2) $۱۰^۲<۸^۲+۷^۲\Rightarrow\hat{C}<۹۰^\circ$

3) $۷^۲<۶^۲+۴^۲\Rightarrow\hat{B}<۹۰^\circ$

4) $۵^۲=۴^۲+۳^۲\Rightarrow\hat{A}=۹۰^\circ$

326 ۱ چون $\frac{۲}{۴}\neq\frac{۱}{۳}$ است، بنابراین MN موازی BC نیست و استفاده از قضیهٔ تالس برای پیدا کردن BC منتفی است. بنابراین ابتدا به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها مقدار $\cos\alpha$ را پیدا می‌کنیم:

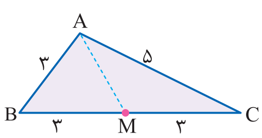


$$۲^۲=۱^۲+۲^۲-۲\times۱\times۲\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

حال مجدداً به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC ضلع BC را پیدا می‌کنیم:

$$BC^۲=۴^۲+۶^۲-۲\times۴\times۶\times\frac{۱}{۴}=۱۶+۳۶-۱۲=۴۰\Rightarrow BC=۲\sqrt{۱۰}$$

327 ٤ می‌دانیم کوتاه‌ترین میانه بر بزرگ‌ترین ضلع وارد می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:



$$۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}=b^۲+c^۲\Rightarrow ۲m_a^۲+\frac{۶^۲}{۲}=۳^۲+۵^۲$$

$$۲m_a^۲=۹+۲۵-۱۸\Rightarrow ۲m_a^۲=۱۶\Rightarrow m_a^۲=۸\Rightarrow m_a=۲\sqrt{۲}$$

363 ۱ کافیست سطر اول ماتریس B را در ماتریس A ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

جمع درایه‌های سطر اول = ۶−

364 ۳ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ ابتدا ماتریس A را از سمت چپ فاکتور می‌گیریم:

$$ABC + ADC = A(BC + DC)$$

حال ماتریس C را از سمت راست از ماتریس‌های درون پرانتز فاکتور می‌گیریم:

$$A(BC + DC) = A(B + D)C$$

۲ می‌توان به‌جای ماتریس C ماتریس $I \times C$ قرار داد (چون I عضو بی‌اثر ضرب است) و از ماتریس C از سمت راست فاکتور گرفت:

$$A \times C + C = A \times C + I \times C = (A + I) \times C$$

۳ اگر دقت کنید متوجه می‌شوید در ماتریس BA ماتریس A در سمت راست و در ماتریس AC ماتریس A در سمت چپ واقع شده است، بنابراین نمی‌توان از ماتریس A فاکتور گرفت.

دقت کنید نمی‌توان ماتریس BA را به‌صورت AB نوشت، چون همان‌طور که گفتیم ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

۴ اگر به‌جای ماتریس 2B ماتریس 2BI را قرار دهیم، آن‌گاه داریم:

$$BC - 2B = BC - 2BI = BC - B(2I) = B \times (C - 2I)$$

365 ۴ در پرانتز اول از ماتریس B را از سمت راست و در پرانتز دوم از C از سمت چپ فاکتور می‌گیریم و با توجه به این که BC=2I است ، خواهیم داشت:

$$(AB+2B)(CA+C)=(A+2I)BC(A+I)$$

$$=(A+2I)(2I)(A+I)=2(A+2I)(A+I)$$

$$=2\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$

366 ۴ می‌دانیم $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$ حال در طرف دوم تساوی پرانتزها را طبق قانون پخشی در هم ضرب می‌کنیم:

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2 \Rightarrow A^2+B^2=(A-B)^2+AB+BA$$

۱ $AB+BA=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

۲ $A-B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-B)^2=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

حال کافی است ۱ و ۲ را با هم جمع کنیم:

$$A^2+B^2=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

367 ۳ ابتدا ماتریس A را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم، سپس درایه‌های نظیر در دو ماتریس را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1+m & 1+2m \\ 2+m & 2+2m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+2m=3 \Rightarrow m=1 \\ 2+2m=x \Rightarrow x=4 \end{cases} \Rightarrow m+x=5$$

368 ۳ برای این‌که ضرب این دو ماتریس تعویض‌پذیر باشد، باید نسبت تفاضل اعداد قطر اصلی آن‌ها برابر با نسبت اعداد قطر فرعی باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\underbrace{\frac{a-2}{7-3}=\frac{3}{6}}_{1}, \quad \overbrace{\frac{3}{6}=\frac{5}{b}}^{2} \Rightarrow \begin{cases} 1:\ 2a-4=4 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4 \\ 2:\ 3\times b=30 \Rightarrow b=10 \end{cases} \Rightarrow a+b=14$$

در ساختن این نسبت‌ها گاهی ممکن است مخرج یکی از کسرها صفر شود، در این صورت برای این‌که تناسب برقرار گردد باید صورت نیز صفر شود و آن کسر به صورت $\frac{0}{0}$ درآید.

369 ۱

$$[x \quad 2x \quad -1]\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow [11x-1 \quad -x-2 \quad -3x]\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x(11x-1)+(-x-2)(2x)-1(3x)=0 \Rightarrow 9x^2-2x=0 \Rightarrow x=0, \frac{2}{9}$$

370 ۳ ابتدا باید ماتریس A^2 را تشکیل دهیم:

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون تشخیص نظم موجود کمی مشکل است پس A^3 را هم می‌سازیم:

$$A^3=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال با توجه به نظم موجود درمی‌یابیم که:

$$A^n=\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{10}=\begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جمع درایه‌ها = ۲۲

371 ۲

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & \log_2^3 \\ \log_3^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \log_2^3 \\ \log_3^2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

حال طرفین تساوی را به توان ۴۹ می‌رسانیم: $A^{98}=I^{49}=I$

372 ۲ ابتدا ماتریس A^2 را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

A متناوب

$$A^7-A^4=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

اگر $A^2=I$ باشد، آن‌گاه: ۱ $A^{2k}=I$ ۲ $A^{2k+1}=I$

436 ۳ برای پیداکردن شعاع دایره باید ابتدا طرفین را بر ۹ تقسیم کنیم تا معادله به‌صورت استاندارد درآید:

$$۹(x-۱)^۲+۹(y+۲)^۲=۳۶ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۴ \Rightarrow R=\sqrt{۴}=۲$$

قطر دایره همواره دو برابر شعاع دایره است؛ یعنی: $d=۲R=۴$

437 ۴ برای تقاطع منحنی با محور x ها به‌جای y صفر قرار می‌دهیم:

$$y=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲+(۰+۱)^۲=۴ \Rightarrow (x-۲)^۲=۳ \Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۳}$$

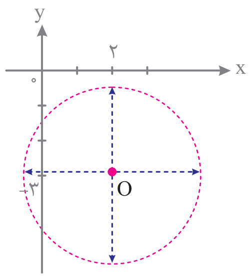
بنابراین منحنی محور xها را دو نقطه قطع می‌کند.

برای تقاطع منحنی با محور y ها به‌جای x صفر قرار می‌دهیم:

$$x=۰ \Rightarrow (۰-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴ \Rightarrow (y+۱)^۲=۰ \Rightarrow y=-۱$$ ریشهٔ مضاعف

بنابراین منحنی در یک نقطه به محور yها مماس است.

438 ۱ باتوجه به معادلهٔ دایره، $O(۲,-۳)$ مرکز دایره و $R=\sqrt{۸}$ شعاع آن است. بنابراین شکل دایره در صفحهٔ مختصات به‌صورت روبه‌رو است: $(\sqrt{۸}\simeq ۲/۸۳)$



برای مشخص کردن حدود دایره کافی است از مرکز دایره به اندازهٔ شعاع به چپ و راست و همچنین بالا و پایین حرکت کنیم.

439 ۲ برای پیداکردن مساحت دایره ابتدا باید شعاع دایره را به‌دست آوریم و برای پیدا کردن شعاع باید ابتدا مرکز را معلوم کنیم:

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y+۳=۰$$

۱ $O\left(-\frac{\text{ضریب } x}{۲}, -\frac{\text{ضریب } y}{۲}\right)=\left(-\frac{۲}{۲}, -\frac{-۴}{۲}\right)=(-۱,۲)$

۲ $R=\sqrt{(\text{طول مرکز})^۲+(\text{عرض مرکز})^۲-\text{ثابت}}=\sqrt{(-۱)^۲+(۲)^۲-۳}=\sqrt{۲}$

بنابراین مساحت دایره برابر است با: $S=\pi R^۲=\pi(\sqrt{۲})^۲=۲\pi$

440 ۳ همان‌طور که می‌بینید در معادلهٔ داده‌شده $c=۰$ است، پس اگر ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر شوند، قطعاً این معادلهٔ دایره است و نیازی به محاسبهٔ شعاع نیست:

$$a^۲-۲=۲ \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=\pm۲$$

441 ۲ ابتدا ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$m^۲-۲=۲ \Rightarrow m^۲=۴ \Rightarrow m=\pm۲$$

حال باید در هرکدام از این دو حالت شعاع را به‌دست آوریم و کنترل کنیم که عدد حقیقی به‌دست آید:

۱ $m=۲ \Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۴x-۴=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases}O(-۱,۰)\\ R=\sqrt{۳}\ \checkmark\end{cases}$

۲ $m=-۲ \Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۴x+۴=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases}O(-۱,۰)\\ R=\sqrt{-۱}\ \times\end{cases}$

442 ۴ مرکز و شعاع دو دایره را پیدا می‌کنیم وطول خط‌المرکزین را با مجموع و تفاضل دو شعاع مقایسه می‌کنیم:

- $x^۲+y^۲-۴x=۰ \Rightarrow O_۱(۲,۰) \Rightarrow R_۱=\sqrt{۴+۰-۰}=۲$
- $x^۲+y^۲+۴x-۵=۰ \Rightarrow O_۲(-۲,۰) \Rightarrow R_۲=\sqrt{۴+۰+۵}=۳$
- $d=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۰-۰)^۲}=۴$
- $R_۱+R_۲=۵$
- $|R_۱-R_۲|=۱$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود $۱<d<۵$، بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

443 ۳ ابتدا مرکزها و شعاع‌های دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$C_۱:\begin{cases}O_۱(-۱,۴)\\ R_۱=\sqrt{۱+۱۶-۱}=۴\end{cases} \qquad C_۲:\begin{cases}O_۲(۳,۱)\\ R_۲=\sqrt{۹+۱-۹}=۱\end{cases}$$

$$d=|O_۱O_۲|=\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۴-۱)^۲}=۵$$

حال می‌توانیم طول مماس مشترک خارجی را با داشتن d، $R_۱$ و $R_۲$ محاسبه کنیم:

$$L=\sqrt{d^۲-(R_۱-R_۲)^۲}=\sqrt{۵^۲-(۴-۱)^۲}=\sqrt{۲۵-۹}=\sqrt{۱۶}=۴$$

444 ۴ ابتدا مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ مرکز دایره تا خط را با شعاع مقایسه می‌کنیم:

$$O(۳,-۱) \Rightarrow R=\sqrt{۹+۱-(-۶)}=۴$$

$$OH=\left|\frac{۳(۳)+۴(-۱)+۵}{\sqrt{۹+۱۶}}\right|=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

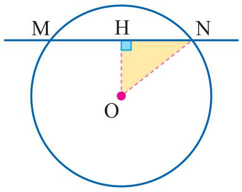
چون $OH<R$ است، پس خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند اما از مرکز دایره نمی‌گذرد (چون اگر از مرکز می‌گذشت، باید فاصلهٔ مرکز دایره از خط صفر می‌شد؛ درحالی‌که ۲ به‌دست آمده است).

445 ۲ اگر خط و دایره در دو نقطهٔ M و N متقاطع باشند، آن‌گاه برای یافتن اندازهٔ وتر MN ابتدا باید مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره را به‌دست آوریم:

$$O(۱,۴) \Rightarrow R=\sqrt{۱+۱۶-(-۸)}=۵$$

در این مرحله، باید فاصلهٔ مرکز دایره [نقطهٔ $O(۱,۴)$] از خط یعنی اندازهٔ پاره‌خط OH را بیابیم:

$$۵x+۱۲y-۱۴=۰ \Rightarrow OH=\left|\frac{۵(۱)+۱۲(۴)-۱۴}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}\right|=\left|\frac{۳۹}{۱۳}\right|=۳$$



حال با توجه به این‌که $R=۵$ و $OH=۳$ است، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ONH، $NH=۴$ خواهد بود و در نتیجه طول وتر MN برابر است با:

$$|MN|=۴\times۲=۸$$

508 ۱ برای این‌که دو بردار موازی باشند، باید نسبت مؤلفه‌های آن‌ها با هم برابر شود، اما برای این‌که اشتباه محاسباتی برایتان پیش نیاید، نسبت‌ها را به‌صورت زیر تشکیل دهید:

$$\frac{۲}{\boxed{\text{Loading}}}=\frac{۱}{\boxed{\text{please}}}=\frac{m}{\boxed{\text{wait}}}$$

یعنی ابتدا یک بردار را در صورت‌های مناسب قرار دهید و سپس بردار دوم را قرار دهید:

$$\frac{۲}{-۱}=\frac{۱}{۲k}=\frac{m}{۱}\Rightarrow m\times k=(-۲)(-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}$$

509 ۳ قطرهای متوازی‌الاضلاع بنا شده بر a و b بردارهای a+b و a−b هستند:

$$a+b=(۴,۱,۱)\Rightarrow |a+b|=\sqrt{۱۶+۱+۱}=۳\sqrt{۲}$$

$$a-b=(-۲,۳,۳)\Rightarrow |a-b|=\sqrt{۴+۹+۹}=\sqrt{۲۲}$$

510 ۴ رابطهٔ داده شده را باز می‌کنیم:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=A-G+B-G+C-G=A+B+C-۳G$$

حال با توجه به این‌که G محل برخورد میانه‌هاست $G=\frac{A+B+C}{۳}$ می‌باشد.

بنابراین خواهیم داشت: $\text{حاصل}=A+B+C-۳(\frac{A+B+C}{۳})=\bar{O}$

511 ۴ مسیر فرود خرچنگی یا فرود ایمن در راستای مجموع دو بردار a و b است:

$$a+b=(۱,۲,-۲)+(۲,۳,-۱)=(۳,۵,-۳)$$

512 ۱ برای این‌که دو بردار a+b و a−b بر هم عمود باشند، لازم است که دو بردار a و b هم‌اندازه باشند: $(a+b)\perp(a-b)\Leftrightarrow |a|=|b|$

$$\sqrt{m^۲+۴+۱}=\sqrt{۴۱}\Rightarrow m^۲+۵=۴۱\Rightarrow m^۲=۳۶\xrightarrow{m>۰}m=۶$$

513 ۱ چون بردار a+b نیمساز است، به یقین دو بردار a و b هم‌اندازه هستند، بنابراین:

$$|a|=|b|\Rightarrow\sqrt{۷^۲+۴^۲+۱}=\sqrt{۵^۲+۵^۲+m^۲}$$

$$۶۶=۵۰+m^۲\Rightarrow m^۲=۱۶\Rightarrow m=\pm۴$$

514 ۴ می‌دانیم بردار نیمساز بین دو بردار a و b از رابطهٔ $u=|a|b+|b|a$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$u=\sqrt{۴+۱+۴}(-۶,۳,۲)+\sqrt{۳۶+۹+۴}(۲,۱,-۲)$$

$$u=۳(-۶,۳,۲)+۷(۲,۱,-۲)=(-۴,۱۶,-۸)\approx(-۱,۴,-۲)$$

515 ۴ می‌دانیم $i-k=(۱,۰,-۱)$ و $k-j=(۰,-۱,۱)$، بنابراین:

$$\begin{cases}|i-k|=\sqrt{۱^۲+۰^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۲}\\ |k-j|=\sqrt{۰^۲+(-۱)^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow |i-k|+|k-j|=\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

516 ۱ همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ تفاضل بردارها شرکت‌پذیر نیست: $a-(b-c)=a-b+c\neq(a-b)-c$

۲ بردار صفر عضو بی‌اثر جمع و تفریق بردارهاست: $a-\bar{o}=a$

۳ ضرب عدد روی جمع و تفریق بردارها توزیع‌پذیر است: $r(b-c)=rb-rc$

۴ ویژگی ضرب عدد در بردار: $a=rb\Rightarrow|a|=|r||b|\xrightarrow{r>۰}|a|=r|b|$

517 ۴ ابتدا بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را می‌سازیم:

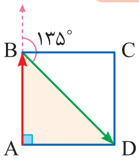
$$\overrightarrow{AB}=B-A=(۳,-۱,۱)-(۱,۲,۱)=(۲,-۳,۰)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(-۲,۱,-۲)-(۱,۲,۱)=(-۳,-۱,-۳)$$

حال می‌توانیم حاصل‌ضرب داخلی دو بردار را به‌دست آوریم:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(۲)(-۳)+(-۳)(-۱)+(۰)(-۳)=-۶+۳=-۳$$

518 ۳ می‌دانیم وقتی می‌خواهیم زاویهٔ دو بردار را از روی شکل پیدا کنیم، باید دو بردار هم‌مبدأ باشند. بنابراین بردار $\overrightarrow{AB}$ را امتداد می‌دهیم و خواهیم داشت:



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|\cos۱۳۵^\circ=۶\times۶\sqrt{۲}\times(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۳۶$$

519 ۳ می‌دانیم مجموع زاویه‌های حول یک نقطه برابر ۳۶۰° است، بنابراین اگر θ زاویهٔ بین b و c باشد، داریم: $\theta+۱۱۰^\circ+۱۷۰^\circ=۳۶۰^\circ\Rightarrow\theta=۸۰^\circ$

بنابراین زاویهٔ بین b و c حاده است و ضرب داخلی آن‌ها عددی مثبت است، درحالی‌که زاویهٔ بین a و b و همچنین زاویهٔ بین a و c منفرجه است و ضرب داخلی آن‌ها عددی منفی است.

520 ۱ چون زاویهٔ رأس A را می‌خواهیم، باید دو برداری را تشکیل دهیم که از رأس A شروع می‌شوند:

۱ $\overrightarrow{AB}=B-A=(۳,-۱,۲)-(۲,۱,۰)=(۱,-۲,۲)$

۲ $\overrightarrow{AC}=C-A=(-۱,۱,۳)-(۲,۱,۰)=(-۳,۰,۳)$

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-۳+۰+۶}{\sqrt{۱+۴+۴}\times\sqrt{۹+۰+۹}}=\frac{۳}{۳\sqrt{۱۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}$$

521 ۲ مختصات بردار a به‌صورت $a=(-۱,۱,\sqrt{۲})$، حال برای پیدا کردن زاویهٔ آن با جهت مثبت محور yها زاویهٔ بردار a را با بردار $j=(۰,۱,۰)$ پیدا می‌کنیم:

$$\cos\beta=\frac{a.j}{|a||j|}=\frac{۰+۱+۰}{\sqrt{۱+۱+۲}\times۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\beta=۶۰^\circ$$

522 ۲ ابتدا کسینوس زاویهٔ بین دو بردار را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱\Rightarrow\cos^۲\theta+۰/۶۴=۱\Rightarrow\cos\theta=\pm۰/۶$$

با توجه به این که θ منفرجه است $\cos\theta<۰$ است یعنی $\cos\theta=-۰/۶$ است، حال با توجه به ویژگی‌های ضرب داخلی که بسیار شبیه ضرب دو عدد است، عبارت داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(۲a-b).(a+b)=۲|a|^۲+۲a.b-b.a-|b|^۲=۲|a|^۲+a.b-|b|^۲$$

می‌دانیم $a\cdot b=|a||b|\cos\theta$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{حاصل}=۲\times۳^۲+[۳\times۱۰\times(-۰/۶)]-۱۰^۲=۱۸-۱۸-۱۰۰=-۱۰۰$$