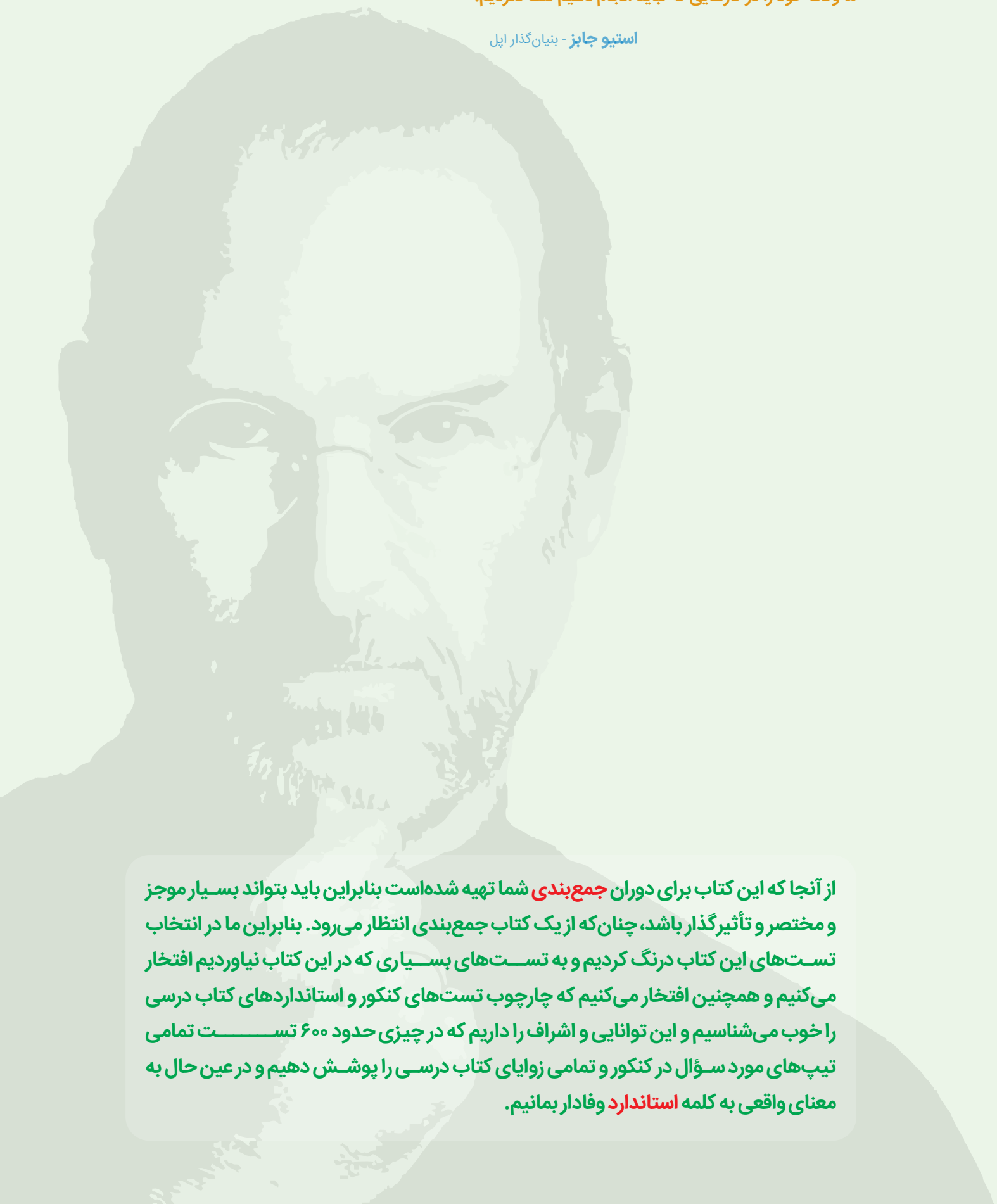
"من به کارهای بسیاری که انجام نداده‌ام هم افتخار می‌کنم،
راز موفقیت اپل هم همین است،
ما وقت خود را در کارهایی که نباید انجام دهیم تلف نکردیم."

استیو جابز - بنیان‌گذار اپل



از آنجا که این کتاب برای دوران **جمع‌بندی** شما تهیه شده‌است بنابراین باید بتواند بسیار موجز و مختصر و تأثیرگذار باشد، چنان‌که از یک کتاب جمع‌بندی انتظار می‌رود. بنابراین ما در انتخاب تست‌های این کتاب درنگ کردیم و به تست‌های بسیاری که در این کتاب نیاوردیم افتخار می‌کنیم و همچنین افتخار می‌کنیم که چارچوب تست‌های کنکور و استانداردهای کتاب درسی را خوب می‌شناسیم و این توانایی و اشراف را داریم که در چیزی حدود ۶۰۰ تست تمامی تیپ‌های مورد سؤال در کنکور و تمامی زوایای کتاب درسی را پوشش دهیم و در عین حال به معنای واقعی به کلمه **استاندارد** وفادار بمانیم.

پتر شولتسه
متولد ۱۹۸۷

Peter Scholze

آزمون ۱. مجموعه
آزمون ۲. الگو و دنباله
آزمون ۳. مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

1 CHAPTER
Set, Pattern & Sequence

آزمون اول
ریاضی ۱۰

مجموعه

صفحه ۲ تا ۱۳

1 کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}'=\mathbb{N}$
۲) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$
۳) $(\mathbb{Z}-\mathbb{Q})\subset\mathbb{N}$
۴) $(\mathbb{R}-\mathbb{Q}')\subseteq\mathbb{W}$

2 اگر $A=(-3,6]$, $B=(0,8]$, $C=(-\infty,3]$, $D=(2,+\infty)$ باشد، حاصل $(A\cup C)-(B\cap D)$ برابر با کدام بازه است؟

۱) $(-3,2]$
۲) $(-\infty,2]$
۳) $(-\infty,2)$
۴) $(0,\infty)$

3 کدام مجموعه متناهی است؟

۱) اعداد صحیح کمتر از ۲۵
۲) مثلث‌هایی با مساحت ۶
۳) اعداد گویای موجود در بازهٔ $(1,3)$
۴) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid\frac{10}{x}\in\mathbb{N}\}$

4 اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و B مجموعهٔ اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟

۱) $A-B$
۲) $B-A$
۳) $A\cap B$
۴) $A-(A\cup B)$

5 کدام گزینه درست است؟

۱) اگر مجموعهٔ $A\cup B$ نامتناهی و مجموعهٔ B نیز نامتناهی باشد، مجموعهٔ A متناهی است.
۲) اگر مجموعه‌های A و B نامتناهی باشند، مجموعهٔ $A\cap B$ هم نامتناهی است.
۳) اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعهٔ A' متناهی است.
۴) اگر مجموعهٔ A متناهی و مجموعهٔ B نامتناهی باشد، مجموعهٔ $B-A$ نامتناهی است.

6 اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد و $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{4,5,6,7\}$ باشند، متمم مجموعهٔ $B'-A$ چند عضو دارد؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۸

7 اگر $A=(-2,3]$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}$ باشد، مجموعهٔ $A'\cup B'$ کدام است؟

۱) $(1,3]$
۲) $(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$
۳) $\mathbb{R}-(1,3)$
۴) $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

8 اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، ساده شدهٔ مجموعهٔ $(A-B)-(B\cap A')$ برابر کدام است؟

۱) B'
۲) $\varnothing$
۳) $A\cap B$
۴) $A-B$

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۱ • مجموعه، الگو و دنباله

9 اگر $n(A)=۴$ ، $n(B)=۷$ ، $n(A-B)=۳$ مجموعهٔ $A\cup B$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۲ ۴) ۱۳

10 اگر مجموعه‌های A و B به‌ترتیب دارای ۵ و ۷ عضو باشند، در کدام حالت زیر تعداد اعضای مجموعهٔ $A\cup B$ حداکثر خواهد بود؟

۱) A زیرمجموعهٔ B باشد. ۲) B زیرمجموعهٔ A باشد.

۳) A و B جدا از هم باشند. ۴) بستگی به مجموعهٔ مرجع دارد.

11 فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند و $n(U)=۸۰$ ، $n(A)=۲۰$ ، $n(B')=۵۵$ ، $n(A\cup B)=۳۷$ تعداد اعضایی که فقط در مجموعهٔ B قرار دارند کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵

۳) ۱۶ ۴) ۱۷

12 در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزشی هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (داخل - ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶

۳) ۱۷ ۴) ۱۸

13 در یک کلاس ۲۰ نفره، ۸ نفر عینکی و ۴ نفر چپ دست هستند و ۱۰ نفر نه چپ دست هستند و نه عینکی، تعداد دانش‌آموزانی که هم عینک زده‌اند و هم چپ دست هستند کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۸ ۴) ۶

14 اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به‌ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعهٔ اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ جدید کدام است؟

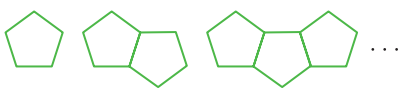
۱) ۲۲ ۲) ۲۳

۳) ۲۴ ۴) ۲۶

آزمون دوم — الگو و دنباله

ریاضی ۱۰ — صفحه ۱۴ تا ۲۷

15 در الگوی مقابل، تعداد پاره‌خط‌ها در شکل دوازدهم کدام است؟



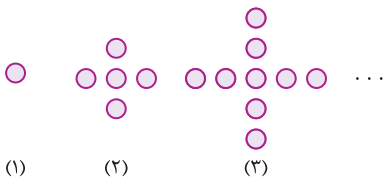
۱) ۵۳

۲) ۴۹

۳) ۴۵

۴) ۴۴

16 با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل چندم برابر ۲۹ است؟



(۱) (۲) (۳)

۱) هفتم

۲) هشتم

۳) نهم

۴) دهم

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۱ • مجموعه، الگو و دنباله

استانیسلاف اسمیرنف
متولد ۱۹۷۰

Stanislav Smirnov

آزمون ۵. قدر مطلق و جزء صحیح
آزمون ۶. معادلات گویا و رادیکالی، نامعادله
آزمون ۷. معادلات و نامعادلات قدر مطلق

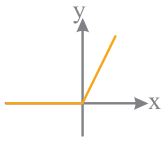
Elementary Operations

CHAPTER 3

80 اگر $x<y<0$ و $\sqrt{x^2+2xy+y^2}-|x-y|+\frac{y}{\sqrt{y^2}}-\frac{\sqrt{x^2}}{x}=8$ باشد، مقدار y کدام است؟

۱) -1
۲) -2
۳) -3
۴) -4

81 شکل روبه‌رو نمودار کدام تابع است؟



۱) $y=x-|x|$
۲) $y=x+|x|$
۳) $y=|x-1|-1$
۴) $y=1-|x-1|$

(داخل - ۹۰)

82 مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $f(x)=|2x-1|$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) 2
۳) $\frac{5}{2}$
۴) 3

83 مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=2-|x|$ کدام است؟ (داخل - ۹۵)

۱) 2
۲) $\frac{7}{3}$
۳) $\frac{8}{3}$
۴) 3

84 حاصل عبارت $[\sqrt{24}]+\cdots+[\sqrt{12}]+[\sqrt{11}]+[\sqrt{10}]$ کدام است؟

۱) ۴۵
۲) ۴۸
۳) ۵۰
۴) ۵۴

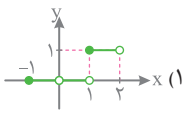
85 به‌ازای چه مقادیری از x رابطهٔ $[x+1]+[x-2]=3$ برقرار است؟

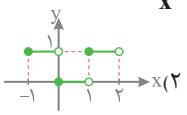
۱) $[2,3)$
۲) $[1,2)$
۳) $(0,3)$
۴) $[2,4)$

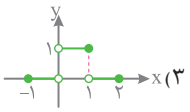
86 مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y=[\frac{x}{3}]+1$ و محور xها در بازهٔ $[0,6)$ کدام است؟

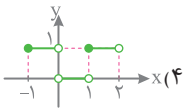
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۱

87 نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x|}{x}[x]$ کدام است؟

۱)


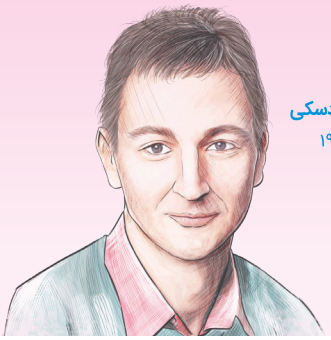
۲)


۳)


۴)


NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۳ • معادله و نامعادله



ولادیمیر وایودسکی
متولد ۱۹۶۶

Vladimir Voevodsky

آزمون ٤. توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

Rational Exponents & Algebraic Expressions

2 CHAPTER

آزمون چهارم

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

ریاضی ۱۰

صفحه ۴۸ تا ۶۸

62 ساده شدهٔ عبارت $۶^{۴} \times (\frac{۳}{۴})^{-۳} \times (۰/۲۵)^{۴}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۸

63 اگر $A = \frac{۲}{۳}\sqrt{۱۸} + ۲\sqrt{۲۷} - \sqrt{۱۰۸} + ۰/۳\sqrt{۲۰۰}$ باشد، $A^{۲}$ برابر کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ۴۵
۳) ۴۸
۴) ۵۰

64 حاصل عبارت $\sqrt[۶]{۶\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۵۴}}} \times \sqrt[۶]{۱۲}$ کدام است؟ (خارج - ۹۵)

۱) $۶\sqrt[۶]{۲}$
۲) ۶
۳) $۳\sqrt[۶]{۳۲}$
۴) $۲\sqrt[۳]{۹}$

65 اگر $A = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}} \times (\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۱

66 اگر $xy^{۲} = \frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $(x+۳y^{۲})^{۲} - (x-۳y^{۲})^{۲}$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۸

67 اگر $۲x + \frac{۵}{x} = ۹$ باشد، حاصل $۴x^{۲} + \frac{۲۵}{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۴۳
۲) ۵۱
۳) ۵۷
۴) ۶۱

68 اگر $A = (x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x - ۸)(\frac{x}{x^{۲} - ۴x + ۴} - \frac{۱}{x-۲})$ باشد، حاصل $\frac{x-۲}{A}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) -۲

69 در تجزیهٔ عبارت $x^{۴} - ۳x^{۳} + ۸x - ۲۴$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟

۱) $x-۴$
۲) $x-۲$
۳) $x+۲$
۴) $x+۳$

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۲ • توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

پی‌یر دلین
متولد ۱۹۴۴

Pierre Deligne

آزمون ۸. معادله درجهٔ دوم

آزمون ۹. نمودار تابع درجهٔ دوم (سهمی)

Quadratic

CHAPTER 4

آزمون هشتم

معادله درجه دوم

ریاضی ۱۰: صفحه ۷۰ تا ۷۷ - حسابان ۱: صفحه ۷ تا ۹

ریاضی ۱۰ + حسابان ۱

125 به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادلهٔ درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشهٔ حقیقی است؟ (خارج - ۸۹)

۱) $-3<m<5$
۲) $-3<m<4$
۳) $-2<m<4$
۴) $-1<m<5$

126 به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+mx+m-\frac{3}{2}=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

۱) $m<2$ یا $m>6$
۲) $m<3$ یا $m>4$
۳) $2<m<6$
۴) $3<m<4$

127 اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha=7$
۲) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{2}{5}$
۳) $\alpha^3+\beta^3=125$
۴) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{21}{2}$

128 اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $4x^2-12x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) $2\sqrt{2}$
۴) $4\sqrt{2}$

129 اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-3=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{1+\alpha}+\frac{\beta}{3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{5}$
۴) -1

130 به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2+3x+m^2-2=0$ معکوس یکدیگرند؟

۱) -2
۲) -1
۳) ۲
۴) ۱

131 به ازای کدام مقدار m مجموع جذر هردو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ می‌باشد؟ (داخل - ۹۶)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

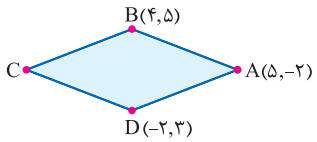
132 به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ می‌باشد؟ (داخل - ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$
۲) ۱
۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$
۴) $\frac{9}{5}$ و -1

NOTE

gajmarket.com خرید آنلاین در
ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON

159 در لوزی شکل مقابل مختصات رأس C کدام است؟



۱) $(-۴,۶)$ ۲) $(-۳,۶)$

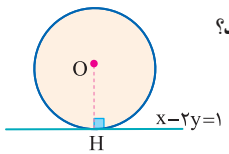
۳) $(-۴,۲)$ ۴) $(-۳,۱۰)$

160 نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (داخل - ۹۰)

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$

۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

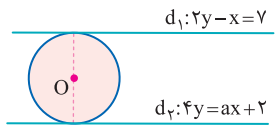
161 در شکل مقابل، مرکز دایره روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد. اگر شعاع دایره برابر $\sqrt{۵}$ باشد، طول مرکز دایره کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۴ ۲) ۶

۳) -۱ ۴) -۳

162 در شکل مقابل، دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ بر دایره مماس‌اند. مساحت دایره کدام است؟



۱) π ۲) $۱/۵\pi$

۳) $۱/۸\pi$ ۴) $۲/۲\pi$

163 نقطهٔ $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادلهٔ $۲y-x=۵$ است. مساحت این مربع، کدام است؟ (خارج - ۹۳)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵

۳) ۷۵ ۴) ۸۰

164 دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (خارج - ۹۰)

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶

۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

165 اگر $A(۱,۰)$، نقطهٔ B واقع بر نیمساز ربع دوم و طول پاره خط AB برابر $\sqrt{۵}$ باشد، مختصات نقطهٔ B کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(-۱,۱)$

۳) $(۱,-۱)$ ۴) $(۲,-۲)$

166 نقاط $A(۳,۳)$ و $B(-۶,-۲)$ دو سر پاره‌خط AB هستند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $۳x-۵y=۷$ ۲) $۳x-۵y=۱۱$

۳) $۲x+۳y=۷$ ۴) $۲x+۳y=۱۱$

167 کدام یک از خط‌های زیر یکی از زاویه‌های حاصل از تقاطع دو خط $۲x+۳y=۲$ و $۳x+۲y=۸$ را نصف می‌کند؟

۱) $x+y=۲$ ۲) $x+y=۱$

۳) $x-y=۳$ ۴) $x-y=۱$

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com
ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON

آرتور آویلا
متولد ۱۹۷۹

آزمون ۱۱. مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع
آزمون ۱۲. انتقال، توابع صعودی و نزولی
آزمون ۱۳. اعمال جبری روی توابع، ترکیب توابع
آزمون ۱۴. تابع یک به یک و تابع وارون
آزمون ۱۵. تقسیم و بخش‌پذیری

Exponential functions & Logarithms

6 CHAPTER

Artur Avila

آزمون یازدهم — مفهوم تابع، دامنه و برد، تساوی دو تابع

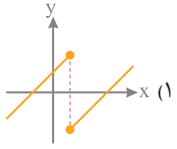
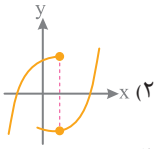
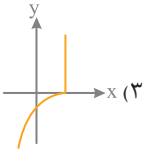
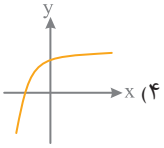
ریاضی ۱۰ + حسابان ۱

ریاضی ۱۰: صفحهٔ ۹۵ تا ۱۱۳- حسابان ۱: صفحهٔ ۳۸ تا ۵۳

168 اگر رابطهٔ $\{(5,2a-b),(3,7),(7,2),(5,4),(3,a+2b)\}=f$ یک تابع باشد، a^2-b^2 کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

169 کدام نمودار، نمایش یک تابع $y=f(x)$ است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

170 اگر رابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & ;\ x\le 2\\ ax-2 & ;\ x\ge 2\end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

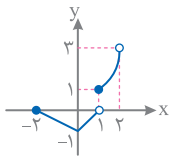
171 کدام رابطه نشان‌دهندهٔ یک تابع است؟

۱) $|x|+|y|=4$
۲) $y=\sqrt{x^2-1}$
۳) $y^2=5x-1$
۴) $y(x-2)=0$

172 اگر $\{(4,n^2-3n),(20,n^2+n),(1,m+n)\}=f$ یک تابع همانی باشد، m کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳-
۳) ۲-
۴) ۶

173 شکل مقابل، نمودار تابع $f:[-2,2)\to B$ است. مجموعهٔ B کدام یک از مجموعه‌های زیر می‌تواند باشد؟



۱) $[-1,1]$
۲) $[-1,0)\cup(1,3)$
۳) $[-1,3)-(0,1]$
۴) $[-1,5)$

174 دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+ax+b}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{3\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۶-

175 اگر $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ دامنهٔ تابع $f(3-x)$، کدام است؟ (داخل - ۹۲)

۱) $[0,2]$
۲) $[0,3]$
۳) $[1,2]$
۴) $[1,3]$

176 اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$ دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x\le -1$
۲) $x\ge -1$
۳) $x\le 1$
۴) $x\ge 1$

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۶ • تابع

187 قرینهٔ نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج - ۹۷)

۱) -2 ۲) $0/5$
۳) 1 ۴) $1/5$

188 به‌ترتیب با کدام انتقال‌ها نمودار $y=x^2+6x+4$ به روی نمودار $y=x^2-4x+3$ منطبق می‌شود؟

۱) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا ۲) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت بالا
۳) ۵ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت پایین ۴) ۵ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت پایین

189 نمودار تابع $y=x^2-3x-10$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟ (خارج - ۹۳)

۱) ۱ ۲) $1/5$
۳) ۲ ۴) ۳

190 نمودار تابع $y=x^2-x-3$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی، آنگاه ۹ واحد به‌طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، درکدام بازه زیرمحور xها است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $(-5,2)$ ۲) $(-5,3)$
۳) $(-2,3)$ ۴) $(-2,5)$

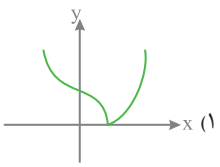
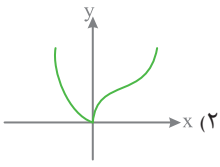
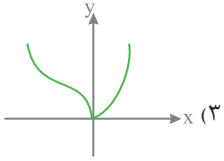
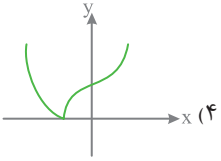
191 نمودار تابع $y=|\frac{1}{2}x|-2$ را ۴ واحد به‌طرف xهای منفی و یک واحد به‌طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟ (داخل - ۹۳)

۱) $-3/5$ ۲) -3
۳) $-2/5$ ۴) -2

192 نمودار تابع $y=x^3-3x^2+3x+1$ از کدام ناحیهٔ مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم
۳) سوم ۴) چهارم

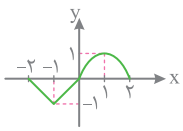
193 نمودار تابع $f(x)=|(x+1)^3-1|$ به کدام صورت است؟

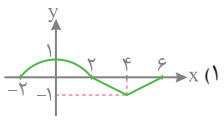
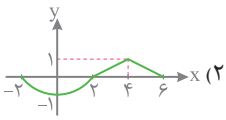
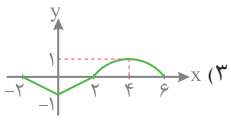
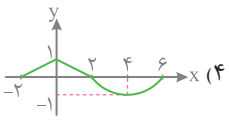
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

194 نمودار تابع $y=\frac{x-2}{x-3}$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم
۳) سوم ۴) چهارم

195 نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(\frac{1}{2}x-1)$ کدام است؟



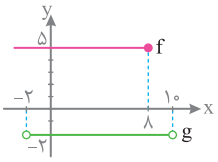
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

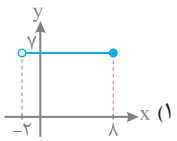
NOTE

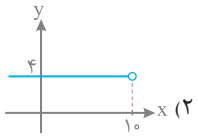
206 اگر $f=\{(2,5),(3,4),(4,6),(1,7)\}$ و $g=\{(1,4),(2,6),(5,2),(4,5)\}$ دو تابع باشند، بُرد تابع $(g^{-1}\circ f)-f$ کدام است؟

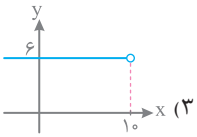
۱) $\{-1,-3,-4\}$
۲) $\{1,2,-4\}$
۳) $\{-3,-4\}$
۴) $\{-1,-4\}$

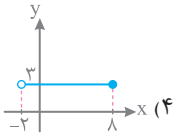
207 طبق شکل مقابل، نمودار تابع $f-g$ کدام است؟



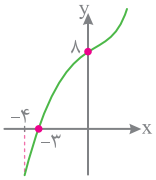
۱)


۲)


۳)


۴)


208 نمودار تابع $f+g$ به‌صورت مقابل است. اگر $f(x)=2x+\sqrt{x+4}$ باشد، حاصل $\frac{g(0)}{g(-3)}$ کدام است؟



(خارج - ۹۰)

۱) ۱/۲
۲) ۱/۵
۳) ۲/۲۵
۴) ۰/۷۵

209 در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{7}{4}$
۳) ۴
۴) $\frac{9}{4}$

210 اگر $f(x)=2-|x-2|$، ضابطهٔ تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (خارج - ۹۰)

۱) x
۲) $4-x$
۳) $f(x)$
۴) $2-f(x)$

211 اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(1,2),(5,4),(6,5),(2,3)\}$ و $g(f(a))=5$ باشد عدد a کدام است؟ (داخل - ۹۱)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

212 توابع $f=\{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$ و $g=\{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(4,2)\in fog$ و $(4,1)\in gof$، آن‌گاه دو تایی (a,b) کدام است؟

۱) $(3,4)$
۲) $(4,5)$
۳) $(4,3)$
۴) $(5,4)$

213 اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{2x+2}{2-x}$ باشند، آن‌گاه ضابطهٔ تابع gof کدام است؟ (داخل - ۹۶)

۱) $x-1$
۲) $x+1$
۳) x
۴) $2x$

214 اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin^2 x$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟ (خارج - ۹۲)

۱) $-\frac{1}{4}\sin^2 2x$
۲) $-\frac{1}{2}\sin^2 2x$
۳) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$
۴) $\frac{1}{2}\cos^2 2x$

215 اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8x^2+6x+5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج - ۹۵)

۱) $2x^2+3x+1$
۲) $2x^2-2x+3$
۳) $2x^2-x+4$
۴) $2x^2+x+3$

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۶ • تابع

7 CHAPTER

Trigonometric Functions

تیموثی گاورز
متولد ۱۹۶۳

Timothy Gowers

آزمون چهاردهم نسبت‌های مثلثاتی، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

حسابان ۱

صفحه ۷۲ تا ۷۹

276 اگر $f(x)=(\frac{۳}{a+۲})^x$ ضابطهٔ یک تابع نمایی باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(-۲,۱)\cup(۱,+\infty)$
۲) $(-۲,+\infty)$
۳) $[-۲,۲]$
۴) $\mathbb{R}-(-۲,۱)$

277 در تابع با ضابطهٔ $f(x)=a.b^x;b>۰$ داریم $f(۰)=\frac{۳}{۲}$ و $f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}$ مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟ (داخل - ۹۱)

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۲۴

278 اگر $۲^A=(\frac{۴^{\sqrt{۳۲}}}{۲^{\sqrt{۸}}})^۲$ باشد، مقدار A کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $۱۲\sqrt{۲}$

279 از معادلهٔ $\frac{۸^x}{۳۲}=(۸\sqrt{۲})^{۳x}$ مقدار x کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۲}{۳}$

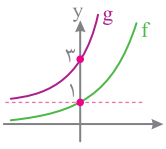
280 دو تابع $f(x)=۳^{ax+b}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۹})^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(۲)=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲۷)$ کدام است؟ (داخل - ۹۵)

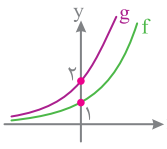
۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۱
۴) ۳

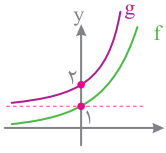
281 نمودار یک تابع به‌صورت $f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B}$ نمودار تابع $y=x^۲-x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(۳)$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

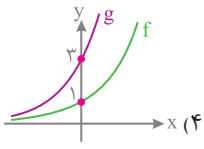
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

282 در کدام گزینه نمودارهای دو تابع $f(x)=۳^x$ و $g(x)=۳^{x+۱}$ به درستی رسم شده است؟

۱)


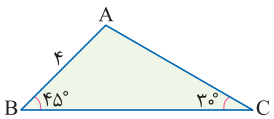
۲)


۳)


۴)


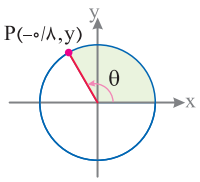
NOTE

319 در مثلث مقابل، طول ضلع BC کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$
۲) $۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$
۳) $\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$
۴) $۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$

320 در دایرهٔ مثلثاتی مقابل مقدار $\tan\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $-\frac{۴}{۳}$

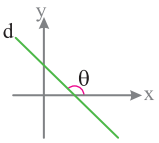
321 کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $\sin ۱۴۰^\circ > \cos ۱۴۰^\circ$
۲) $\sin ۵۵^\circ < \tan ۵۵^\circ$
۳) $\cot ۳۰۰^\circ > \tan ۳۰۰^\circ$
۴) $\cot ۱۵^\circ < \cos ۱۵^\circ$

322 اگر $-\frac{\pi}{۸} < x < \frac{\pi}{۶}$ و $\cos ۲x = \frac{m+۱}{۲}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(\sqrt{۲}-۱, ۱]$
۲) $(۰, ۱]$
۳) $[-۱, ۰)$
۴) $[-\sqrt{۲}, ۱)$

323 نمودار خط d به معادلهٔ $۳x+۲y=۴$ به‌صورت مقابل است. حاصل $\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

324 اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $-\cos^۲ x$
۲) $-\cos x$
۳) $\cos^۲ x$
۴) $\cos x$

325 اگر $\frac{۳\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲ x}\,(۲\sin^۲ \frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $\sin x$
۲) $\cos x$
۳) $-\sin x$
۴) $-\cos x$

326 حاصل عبارت $\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})+\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

327 اگر $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})$$

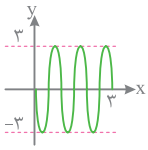
(خارج - ۹۸)

۱) $-۱/۲۳$
۲) $-۰/۵۲$
۳) $۰/۲۷$
۴) $۰/۴۸$

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۸ • مثلثات

362 شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\cos\pi(\frac{1}{2} - bx)$ است. $a.b$ کدام است؟



۱) -۶
۲) -۳
۳) $۴/۵$
۴) ۶

آزمون بیست و یکم معادلات مثلثاتی

حسابان ۲ صفحه ۳۵ تا ۴۴

363 معادلهٔ مثلثاتی $۳\cos x - ۲ = ۰$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

364 جواب کلی معادلهٔ $\cos ۳x + \cos x = ۰$ با شرط $\cos x \neq ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (خارج ۹۴ و ۹۸)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

365 مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ (خارج - ۹۶)

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$
۲) ۴π
۳) $\frac{۹\pi}{۲}$
۴) ۵π

366 معادلهٔ $\sin ۳x + \cos ۲x = ۰$ در بازهٔ $[۰, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

367 جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۰$ کدام است؟ (داخل - ۹۵)

۱) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$
۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$
۴) $۲k\pi - \frac{\pi}{۳}$

368 جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x + ۲\cos^۲ x = ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (داخل - ۹۶)

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$
۲) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$
۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

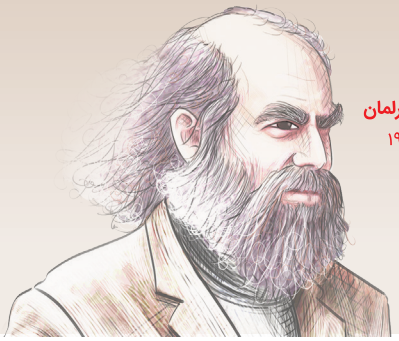
369 مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) ۴π
۴) ۵π

370 جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱$ به کدام صورت است؟ (داخل - ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

NOTE



گریگوری پرلمان
متولد ۱۹۶۶

Grigori Perelman

آزمون ۲۲. همسایگی، فرایندهای حدی و محاسبهٔ حد
آزمون ۲۳. رفع ابهام $\frac{0}{0}$
آزمون ۲۴. پیوستگی
آزمون ۲۵. حدبی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
آزمون ۲۶. مجانب

9 CHAPTER Differentiation

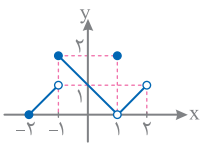
386 به‌ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟ (داخل - ۹۸)

۱) $\emptyset$
۲) $\{2\}$
۳) $2 < x < 2/5$
۴) $1/5 < x < 2$

387 دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -1
۴) ۲

388 نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل کدام یک از حدهای زیر موجود است؟



۱) $\lim_{x\to -2} f(x)$
۲) $\lim_{x\to -1} f(x)$
۳) $\lim_{x\to 1} f(x)$
۴) $\lim_{x\to 2} f(x)$

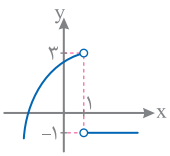
389 کدام تابع زیر در $x=0$ حد **ندارد**؟

۱) $y=x|x|$
۲) $y=x+|x|$
۳) $y=x-|x|$
۴) $y=\frac{x}{|x|}$

390 تابع باضابطهٔ $f(x)=[2x]$ در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ چه وضعیتی دارد؟

۱) حد دارد.
۲) فقط حد راست دارد.
۳) فقط حد چپ دارد.
۴) حد چپ و راست نابرابر دارد.

391 نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. کدام گزینه درست است؟



۱) $\lim_{x\to 1^+} [x] f(x)=1$
۲) $\lim_{x\to 1^-} (x+1) f(x)=3$
۳) $\lim_{x\to 1} (f(x)-1)^2=4$
۴) $\lim_{x\to 2^-} f(x-1)=-1$

392 اگر تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & ; x<1 \\ x^2-1 & ; 1\le x<3 \\ 2x-5 & ; x\ge 3 \end{cases}$ باشد، کدام گزینه صحیح **نیست**؟

۱) $\lim_{x\to -1} f(x)=6$
۲) $\lim_{x\to 1} f(x)=0$
۳) $\lim_{x\to 3} f(x)=1$
۴) $\lim_{x\to 4} f(x)=3$

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۹ • حد و پیوستگی

412 اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه b کدام است؟ (خارج - ۹۵)

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

413 اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{[۴\cos^۲\pi x]-۱۲x}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$ باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟ (خارج - ۹۲)

۱) -۲۰ ۲) -۱۶

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

414 حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}(\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲})$ کدام است؟ (داخل - ۹۶)

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

415 حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos^۳x-۱}{\sin^۲x}([۲x]+[-۲x])$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

۱) -۳ ۲) ۳

۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

416 حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) -۱ ۴) صفر

417 حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) π ۴) ۲π

418 حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}$ کدام است؟ (داخل - ۹۷)

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

419 حد عبارت $[\frac{x}{\sin x}]+۲[\frac{\sin x}{x}]$، وقتی $x\to ۰$ کدام است؟ (خارج - ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) حد ندارد.

420 حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}$، کدام است؟ (خارج - ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

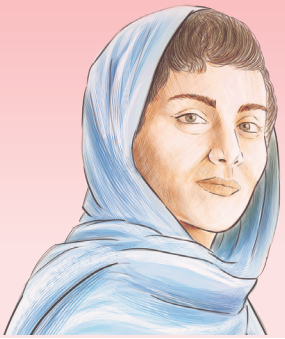
۳) ۱ ۴) ۲

421 حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x-\sin ۲x}{x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) -۱

NOTE



مریم میرزاخانی
۱۳۵۶-۱۳۹۶

آزمون ۲۷. قواعد محاسبهٔ مشتق، خط مماس

آزمون ۲۸. مشتق تابع مرکب، معادلهٔ خط مماس

آزمون ۲۹. مشتق‌پذیری، مشتق چپ و راست و آهنگ تغییر

10 CHAPTER
Applications of Derivatives

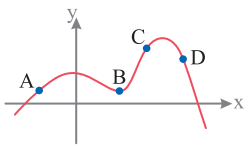
Maryam Mirzakhani

آزمون بیست‌وهفتم (I ♥ gaj) قواعد محاسبهٔ مشتق، خط مماس

حسابان ۲

صفحات ۷۲ تا ۸۳ و ۹۰ تا ۱۰۱

476 با توجه به نمودار تابع f، کدام رابطه میان شیب خط مماس در نقاط مشخص شده برقرار است؟



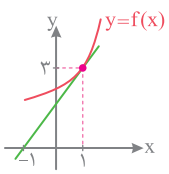
۱) $m_B < m_A < m_C < m_D$

۲) $m_A < m_B < m_D < m_C$

۳) $m_A < m_C < m_B < m_D$

۴) $m_D < m_B < m_A < m_C$

477 در شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟



۱) ۳

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۲

478 اگر $f'(۴)=\frac{۳}{۲}$ باشد، حاصل حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(۴+۳h)-f(۴-h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۱۲

479 حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

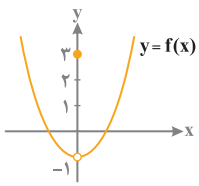
۱) $-\sin a$

۲) $-\cos a$

۳) $\cos a$

۴) $\sin a$

480 نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مشتق تابع $y=xf(x)$ در $x=۰$ کدام است؟



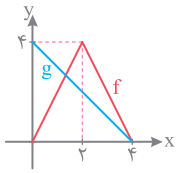
۱) ۱

۲) -۱

۳) ۳

۴) تعریف نشده

481 با توجه به نمودار توابع f و g حاصل $(۳f+۲g)'(۱)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com
ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۱۰ • مشتق

مانجول بارگاوا
متولد ۱۹۷۴

Manjul Bhargava

11 CHAPTER
Count Without Counting

اکسترمم‌های تابع و توابع صعودی و نزولی

صفحه ۱۱۲ تا ۱۲۶

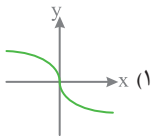
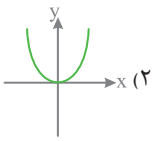
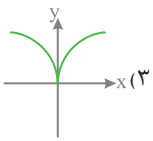
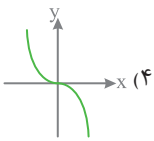
551 تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-2,0)$
۲) $(-\infty,-2)$
۳) $(0,2)$
۴) $\mathbb{R}$

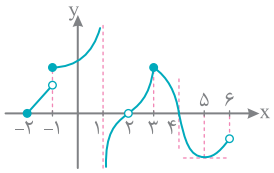
552 تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^3+2x^2+\frac{m}{3}x-1$ همواره صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $[-2,2]$
۲) $(-\infty,-2]$
۳) $[-2,0)$
۴) $[2,+\infty)$

553 نمودار تابع $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟ (داخل - ۹۱)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

554 نمودار تابع f به‌صورت مقابل است، مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع f کدام است؟



۱) $\{-1,1,4\}$
۲) $\{-2,-1,2,3,4\}$
۳) $\{-1,3,4\}$
۴) $\{-2,-1,3,4,5\}$

555 نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^2-2x|$ رئوس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

556 مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^2-28)\times\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) $\{-2,2\}$
۲) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$
۳) $\{-2,0,2\}$
۴) $\{-7,0,1\}$

557 تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ در بازهٔ $[-2,1)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

558 تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|\sin x|$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

NOTE

559 تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]\sin \pi x$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

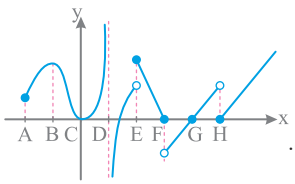
560 تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $y=|x^3-x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟ (داخل - ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

561 مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\{0,\frac{4}{5},2\}$ ۲) $\{0,\frac{2}{3},2\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{\frac{2}{3},2\}$

562 نمودار تابع f به شکل مقابل است. کدام گزینه نادرست است؟



۱) مجموعهٔ نقاط ماکزیمم نسبی تابع $\{B,E\}$ است.
۲) نقطهٔ G اکسترمم نسبی نیست.
۳) نقطه‌ای به طول A اکسترمم نسبی نیست.
۴) مجموعهٔ نقاط مینیمم نسبی تابع $\{C,E,H\}$ است.

563 تابع f روی بازهٔ (a,b) تعریف شده است. در این صورت کدام عبارت در مورد تابع f درست است؟

۱) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، یک نقطهٔ بحرانی است.
۲) هر نقطهٔ بحرانی، یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است.
۳) در هر نقطهٔ بحرانی، تابع مشتق‌پذیر است.
۴) در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، تابع مشتق‌پذیر است.

564 در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{x}$ فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

565 طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ کدامند و از چه نوع هستند؟

۱) $x=-1$ طول ماکزیمم و $x=2$ طول مینیمم
۲) $x=1$ طول ماکزیمم و $x=-2$ طول مینیمم
۳) $x=-1$ طول مینیمم و $x=2$ طول ماکزیمم
۴) $x=1$ طول مینیمم و $x=-2$ طول ماکزیمم

566 تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی
۳) مینیمم و ماکزیمم نسبی ۴) فاقد اکسترمم نسبی

567 فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{2x-x^2}{(x+1)^2}$ از خط مجانب افقی آن کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

568 کدام تابع اکسترمم نسبی دارد؟

۱) $y=x|x|$ ۲) $y=\frac{1}{x}$
۳) $y=\begin{cases}x^2 & ;\ x>0\\ x+1 & ;\ x\le 0\end{cases}$ ۴) $y=\sqrt[3]{x}$

569 در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x|-2x$ فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) ۴

NOTE

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
حسابان جامع کنکور | فصل ۱۱ • کاربرد مشتق

1 ۳ بررسی گزینه‌ها:

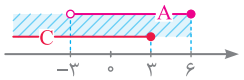
۱ هیچ عددی وجود ندارد که هم طبیعی باشد و هم گنگ، پس: $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$

۲ از آن‌جایی که $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ ، درنتیجه: $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

۳ چون $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ ، پس $\mathbb{Z}-\mathbb{Q}=\varnothing$ در نتیجه: $\varnothing\subseteq\mathbb{N}$

۴ می‌دانیم $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$ ولی $\mathbb{Q}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{W}$ نیست، بلکه $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Q}$

2 ۲ با استفاده از نمایش هندسی، مجموعه‌های $A\cup C$ و $B\cap D$ را روی محور مشخص می‌کنیم:



$A\cup C=(-\infty,6]$

$B\cap D=(2,8]$

حال مجموعهٔ $(A\cup C)-(B\cap D)$ را مشخص می‌کنیم:

$(A\cup C)-(B\cap D)=(-\infty,2]$

3 ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ این مجموعه به صورت $\{\ldots,23,24,25\}$ است که نامتناهی است.

۲ با تغییر مقدار ارتفاع و قاعده، بی‌شمار مثلث با مساحت ۶ می‌توان ساخت.

۳ در بازهٔ $(1,3)$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

۴ مجموعهٔ اعداد طبیعی که عدد ۱۰ بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد، به‌صورت زیر است. پس این مجموعه، متناهی است. $A=\{1,2,5,10\}$

4 ۲ ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$A=\{1,3,5,7,9,\ldots\}\ ,\ B=\{2,3,5,7,11,\ldots\}$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ $A-B=\{1,9,15,21,\ldots\}$ ⇐ نامتناهی و غیرتهی

۲ $B-A=\{2\}$ ⇐ متناهی و غیرتهی

۳ $A\cap B=\{3,5,7,11,\ldots\}$ ⇐ نامتناهی و غیرتهی

۴ $A-(A\cup B)=\varnothing$ ⇐ تهی

5 ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ دراین حالت مجموعهٔ A می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A\cup B=\{0,1,2,\ldots\}\ ,\ B=\{1,2,3,\ldots\}$ ⇐ $\begin{cases}A_1=\{0,2,4,\ldots\}\\A_2=\{0\}\end{cases}$

۲ در این حالت مجموعهٔ $A\cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1=\{0,1,2,\ldots\},B_1=\{1,2,3,\ldots\}$ ⇐ $A_1\cap B_1=\{1,2,3,\ldots\}$

$A_2=\{0,1,2,\ldots\},B_2=\{\ldots,-2,-1,0\}$ ⇐ $A_2\cap B_2=\{0\}$

۳ اگر A نامتناهی باشد، A' می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد:

$A_1=\{1,3,5,\ldots\}\Rightarrow A_1'=\{2,4,6,\ldots\}$

$A_2=\{2,3,4,\ldots\}\Rightarrow A_2'=\{1\}$

۴ اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، مجموعهٔ $B-A$ نامتناهی است.

6 ۳ مجموعهٔ مرجع به‌صورت $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ است، پس:

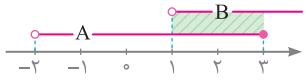
$B'=U-B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}-\{4,5,6,7\}=\{1,2,3,8,9\}$

بنابراین مجموعهٔ $B'-A$ برابر است با:

$B'-A=\{1,2,3,8,9\}-\{1,2,3,4,5\}=\{8,9\}$

پس متمم مجموعهٔ $B'-A$ به‌صورت $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ است که ۷ عضو دارد.

7 ۲ نمایش بازه‌ای مجموعهٔ B به‌صورت $B=(1,+\infty)$ است. چون می‌دانیم $A'\cup B'=(A\cap B)'$ ، پس ابتدا مجموعهٔ $A\cap B$ را مشخص می‌کنیم:

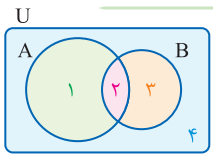


$A\cap B=(1,3]$

متمم مجموعهٔ $A\cap B$ به‌صورت $(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$ است، پس:

$A'\cup B'=(A\cap B)'=(-\infty,1]\cup(3,+\infty)$

8 ۴ نمودار ون را برای دو مجموعهٔ A و B رسم می‌کنیم و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$(A-B)-(B\cap A')=\underbrace{(\{1,2\}-\{2,3\})}_{\{1\}}-\underbrace{(\{2,3\}\cap\{3,4\})}_{\{3\}}=\{1\}$

با توجه به نمودار، ناحیهٔ $\{1\}$ مجموعهٔ $A-B$ را نشان می‌دهد.

9 ۱ برای به‌دست آوردن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعهٔ A و B، به تعداد اعضای اشتراک آن‌ها نیاز داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\Rightarrow 3=4-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=1$

بنابراین $n(A\cup B)$ برابر است با:

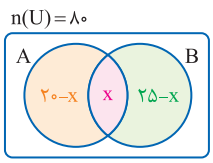
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=4+7-1=10$

10 ۳ می‌دانیم $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ است، بنابراین هنگامی $n(A\cup B)$ ماکسیمم می‌شود که $n(A\cap B)=0$ باشد، یعنی دو مجموعه جدا از هم باشند.

11 ۴ ابتدا تعداد عضوهای مجموعهٔ B را به دست می‌آوریم:

$n(B)=n(U)-n(B')\Rightarrow\ n(B)=80-55=25$

از طرفی $n(A\cup B)=37$ است، حال اگر فرض کنیم $n(A\cap B)=x$ خواهیم داشت:

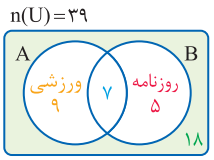


$(20-x)+x+(25-x)=37\Rightarrow x=8$

بنابراین تعداد اعضایی که فقط در مجموعهٔ B هستند، برابر است با:

$25-x=25-8=17$

12 ۴ مطابق نمودار وِن روبه‌رو تعداد افرادی که عضو هیچ‌یک از گروه‌های روزنامه‌دیواری و ورزشی نیستند برابر است با:



$39-(9+7+5)=18$

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

67 ٤ طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x+\frac{5}{x}=9 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x+\frac{5}{x})^2=81 \Rightarrow 4x^2+\frac{25}{x^2}+2(2x)(\frac{5}{x})=81$$

$$4x^2+\frac{25}{x^2}+20=81 \Rightarrow 4x^2+\frac{25}{x^2}=61$$

68 ٣ با استفاده از اتحادهای مربع و مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$A=(x^3-6x^2+12x-8)(\frac{x}{x^2-4x+4}-\frac{1}{x-2})$$

$$=(x-2)^3(\frac{x}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-2})=x(x-2)-(x-2)^2$$

$$=(x-2)(x-(x-2))=(x-2)\times 2 \quad \frac{x-2}{A}=\frac{x-2}{2(x-2)}=\frac{1}{2}$$

اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای به‌صورت زیر است:

1. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
2. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

69 ٣ درجمله‌های x^4 و $8x$ از xودرجمله‌های $-3x^3$ و -24 از ۳-فاکتور می‌گیریم:

$$x^4-3x^3+8x-24=x(x^3+8)-3(x^3+8)$$

$$=(x-3)(x^3+8)=(x-3)(x+2)(x^2-2x+4)$$

اتحادهای زیر به اتحاد چاق و لاغر معروف هستند:

1. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
2. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

70 ١ در هریک از پرانتزها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$(x+\frac{2}{x-3})(1-\frac{1}{x-2})=(\frac{x^2-3x+2}{x-3})(\frac{x-3}{x-2})=\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}=x-1$$

71 ١ کافیست مخرج مشترک بگیریم و صورت کسر را ساده کنیم:

$$\frac{2x^2-x}{4x^2-1}+\frac{x-1}{2x+1}-\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{2x^2-x+(x-1)(2x-1)-(2x+1)(2x+1)}{4x^2-1}$$

$$=\frac{2x^2-x+2x^2-3x+1-4x^2-4x-1}{4x^2-1}=\frac{-8x}{4x^2-1} \quad P(x)=-8x$$

72 ٤ می‌دانیم $\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$ است، پس اگر عبارت داده شده را A فرض کنیم با مربع کردن آن خواهیم داشت:

$$A=(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})\times\sqrt{2} \Rightarrow A^2=(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})^2\times 2$$

$$A^2=(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})})\times 2$$

$$A^2=(4+2\sqrt{4-3})\times 2=(4+2)\times 2=12 \Rightarrow A=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

73 ٤ با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2$$

$$=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2=\alpha^4+\beta^4+\underbrace{\alpha^2\beta^2}_{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\underbrace{(3\sqrt{2}-4)+(3\sqrt{2}+4)}_{6\sqrt{2}}+\sqrt{\underbrace{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}_{(3\sqrt{2})^2-4^2=2}}=7\sqrt{2}$$

74 ٤ می‌دانیم $10\sqrt{3}=2\sqrt{3\times 5^2}=2\sqrt{75}$، پس داریم:

$$\sqrt{28+10\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}=\sqrt{28+2\sqrt{75}}+\sqrt{28-2\sqrt{75}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{25}+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{25}-\sqrt{3})^2}=\underbrace{|5+\sqrt{3}|}_{+}+\underbrace{|5-\sqrt{3}|}_{+}$$

$$=5+\cancel{\sqrt{3}}+5-\cancel{\sqrt{3}}=10$$

75 ١ مخرج کسر را گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{2}{2+\sqrt{6}}\times\frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}+(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$=\frac{2(2-\sqrt{6})}{4-6}+6-\sqrt{6}-6=\frac{2(2-\sqrt{6})}{-2}-\sqrt{6}=\sqrt{6}-2-\sqrt{6}=-2$$

76 ٢ مخرج کسر اول را گویا می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{2}{3-\sqrt{7}}\times\frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}+\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}-\sqrt{4\times 7}+\frac{\sqrt{4\times 2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2(3+\sqrt{7})}{9-7}+\underbrace{|2-\sqrt{7}|}_{-}-2\sqrt{7}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=3+\sqrt{7}+\sqrt{7}-2-2\sqrt{7}+2=3$$

77 ٢ اعداد زیر رادیکال‌ها را تجزیه و مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{3\times 8}\times\sqrt[3]{9}+\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\times\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}-\sqrt{16\times 5}$$

$$=\sqrt[3]{27\times 8}+\frac{(2-\sqrt{5})^2}{4-5}-4\sqrt{5}$$

$$=3\times 2+\frac{4+5-4\sqrt{5}}{-1}-4\sqrt{5}=6-9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}=-3$$

78 ١ چون مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ به‌صورت $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ است، پس باید از اتحاد چاق و لاغر، یعنی $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=(a-b)$ برای گویا کردن مخرج استفاده کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$$

79 ٢ با قرار دادن $5+\sqrt{17}$ به جای x خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{x-1}{16}+\frac{1}{2x}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}-1}{16}+\frac{1}{2(5+\sqrt{17})}}$$

$$=\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{16}+\frac{1}{2(5+\sqrt{17})}\times\frac{5-\sqrt{17}}{5-\sqrt{17}}}$$

$$=\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{16}+\frac{5-\sqrt{17}}{2(25-17)}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{16}+\frac{5-\sqrt{17}}{16}}=\frac{3}{4}=0/75$$

gajmarket.com خرید آنلاین در
ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

93 ۳ در سمت اول معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-x}\Rightarrow\frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2-x}{x(x-1)}$$

با شرط $x\neq 1$ عبارت $(x-1)$ را از مخرج کسرها حذف می‌کنیم:

$$\frac{4x-2}{x+1}=\frac{2-x}{x}\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}4x^2-2x=-x^2+x+2\Rightarrow 5x^2-3x-2=0$$

با توجه به این‌که مجموع ضرایب در این معادله صفر است، یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است. یعنی: $x=1,\ x=\frac{-2}{5}$

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$:

1 اگر $a+b+c=0$ باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}$ است.

2 اگر $b=a+c$ باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر -1 و ریشهٔ دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

94 ۲ چون $x=3$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{x-2}{ax-5}=\frac{a+2}{x-1}-1\xrightarrow{x=3}\frac{1}{3a-5}=\frac{a+2}{2}-1\Rightarrow\frac{1}{3a-5}=\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow 3a^2-5a=2\Rightarrow 3a^2-5a-2=0$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $3a^2-5a-2=0$، عدد ۳ را در ۲- ضرب می‌کنیم:

$$3a^2-5a-2=0\Rightarrow a^2-5a-6=0\Rightarrow(3a+1)(a-\frac{6}{3})=0\Rightarrow a=-\frac{1}{3},2$$

95 ۲ با فرض $\frac{3x}{x-1}=t$ معادله به صورت $2t+\frac{1}{t}=3$ در می‌آید:

$$2t+\frac{1}{t}=3\Rightarrow 2t^2-3t+1=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0}t=1,\ t=\frac{1}{2}$$

1 $\frac{3x}{x-1}=1\Rightarrow 3x=x-1\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$

ریشهٔ بزرگ‌تر $=-\frac{1}{5}$

2 $\frac{3x}{x-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow 6x=x-1\Rightarrow 5x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{5}$

96 ۴ اگر بهروز کل کار را در x ساعت انجام دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{x}$ کار را انجام می‌دهد. حال چون بهروز کار را ۹ ساعت زودتر از فرهاد انجام می‌دهد، پس فرهاد کل کار را در $x+9$ ساعت انجام می‌دهد، پس در هر ساعت $\frac{1}{x+9}$ کار را انجام می‌دهد. از طرفی اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در ۲۰ ساعت انجام می‌شود، پس:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{9+x}=\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{(x+9)+x}{x(x+9)}=\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{2x+9}{x^2+9x}=\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow x^2+9x=40x+180\Rightarrow x^2-31x-180=0\Rightarrow x=36,\ x=-5$$

97 ۳ اگر سرعت آب برابر v باشد، هنگامی که قایق در جهت آب حرکت می‌کند سرعت آن برابر $v+100$ و هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند، سرعتش برابر $v-100$ می‌شود. حال از آن جایی که اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است، پس:

$$\frac{1200}{100-v}-\frac{1200}{100+v}=5\xrightarrow{\div 5}\frac{240}{100-v}-\frac{240}{100+v}=1\xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{جایگذاری}}v=20$$

سرعت متوسط برابر است با جابه‌جایی تقسیم بر زمان سپری شده یعنی: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$. بنابراین خواهیم داشت: $\Delta t=\frac{\Delta x}{v_{av}}$

98 ۳ وزن خالص مادهٔ حل شده در هر حالت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{وزن مادهٔ حل شده}}{11}=\frac{40}{100}\Rightarrow\text{وزن مادهٔ حل شده}=4/4$$

$$\frac{\text{وزن مادهٔ حل شده}}{4}=\frac{70}{100}\Rightarrow\text{وزن مادهٔ حل شده}=2/8$$

حال با مخلوط کردن رنگ‌ها، $15+11=4$ کیلوگرم رنگ ایجاد می‌شود. می‌خواهیم غلظت محلول را به ۵۰ درصد برسانیم. اگر فرض کنیم x کیلوگرم از محلول تبخیر می‌شود؛ پس خواهیم داشت:

$$\frac{\text{وزن مادهٔ حل شده}}{\text{وزن کل}}=\frac{50}{100}\Rightarrow\frac{4/4+2/8}{15-x}=\frac{50}{100}\Rightarrow\frac{7/2}{15-x}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 15-x=14/4\Rightarrow x=0/6$$

99 ۱ اگر طول زمین x و عرض آن y باشد، با توجه به این‌که محیط زمین برابر ۲۰ است؛ پس: $2x+2y=20\Rightarrow x+y=10\Rightarrow y=10-x$

می‌دانیم به عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی می‌گویند. بنابراین:

$$\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{x}{10-x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 2x=10-(1+\sqrt{5})x+10\sqrt{5}$$

$$(3+\sqrt{5})x=10(1+\sqrt{5})\Rightarrow x=\frac{10(1+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}}=\frac{10(1+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}}\times\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{10(3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5)}{9-5}=\frac{10(2\sqrt{5}-2)}{4}=5(\sqrt{5}-1)=5\sqrt{5}-5$$

100 ۱ طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x+1=\sqrt{11x-2}\Rightarrow(2x+1)^2=11x-2\Rightarrow 4x^2+4x+1=11x-2$$

$$4x^2-7x+3=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=\frac{3}{4}\Rightarrow|x_1-x_2|=|1-\frac{3}{4}|=\frac{1}{4}$$

مجموع ضرایب $=0$

101 ۴ رادیکال را تنها کرده و سپس طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{2a^2+4a}=2-3a\Rightarrow 2a^2+4a=9a^2-12a+4\Rightarrow 7a^2-16a+4=0$$

برای راحت‌تر تجزیه کردن عبارت $7a^2-16a+4=0$، عدد ۷ را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$7a^2-16a+4=0\Rightarrow a^2-16a+28=0\Rightarrow(a-\frac{14}{7})(7a-2)=0$$

ریشه‌های معادله $a=\frac{2}{7},\ a=\frac{14}{7}$ به‌دست می‌آید، اما چون $a=2$ طرف سمت راست معادلهٔ اولیه را منفی می‌کند، قابل قبول نیست و فقط $a=\frac{2}{7}$ قابل قبول است، بنابراین:

$$\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}=1+\frac{1}{\frac{2}{7}}=1+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}=4/5$$

102 ۴ معادله را به‌صورت $\sqrt{4x-3}=2-3x$ می‌نویسیم و دامنهٔ رادیکال را به‌دست می‌آوریم: $4x-3\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{3}{4}$

به‌ازای $x\geq\frac{3}{4}$ طرف دوم تساوی، یعنی $2-3x$ عددی منفی است:

$$x\geq\frac{3}{4}\xrightarrow{\times(-3)}-3x\leq\frac{-9}{4}\Rightarrow 2-3x\leq 2-\frac{9}{4}\Rightarrow 2-3x\leq\frac{-1}{4}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده جواب ندارد.

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

125 ۱ برای این که معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲+(m+۱)x+\frac{۱}{۲}m+۲=۰$ فاقد ریشهٔ حقیقی باشد، باید $\Delta<۰$ باشد:

$$\Delta=b^۲-۴ac<۰\Rightarrow(m+۱)^۲-۴(۲)(\frac{۱}{۲}m+۲)<۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۲m+۱-۴m-۱۶<۰\Rightarrow m^۲-۲m-۱۵<۰$$

$$\Rightarrow(m-۵)(m+۳)<۰\Rightarrow -۳<m<۵$$

---

126 ۱ برای این که معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲+mx+m-\frac{۳}{۲}=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta>۰$ باشد:

$$\Delta=m^۲-۴(۲)(m-\frac{۳}{۲})>۰\Rightarrow \underbrace{m^۲-۸m+۱۲}_{(m-۲)(m-۶)}>۰\Rightarrow m<۲ \text{ یا } m>۶$$

---

127 ٤ از آن‌جایی که α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^۲-۵x+۲=۰\Rightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{-۵}{۱}=۵\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{۲}{۱}=۲$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ $\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=۲\times۵=۱۰$

۲ $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{۵}{۲}$

۳ $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۵^۳-۳\times۲(۵)=۱۲۵-۳۰=۹۵$

٤ $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{۵^۲-۲(۲)}{۲}=\frac{۲۵-۴}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$

---

128 ۲ $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند؛ پس:

$$۴x^۲-۱۲x+۱=۰\Rightarrow x_۱+x_۲=-\frac{-۱۲}{۴}=۳,\ x_۱x_۲=\frac{۱}{۴}$$

حال با فرض $A=\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}$ داریم:

$$A=\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}\ \Rightarrow A^۲=x_۱+x_۲+۲\sqrt{x_۱x_۲}$$

$$\Rightarrow A^۲=۳+۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}=۳+۲(\frac{۱}{۲})=۳+۱=۴\Rightarrow A=\pm\sqrt{۴}=\pm۲$$

چون A مجموع دو عدد مثبت است، پس $A=۲$ جواب است.

---

129 ۱ چون α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+x-۳=۰$ است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^۲+\alpha-۳=۰\Rightarrow\alpha(\alpha+۱)=۳\Rightarrow\frac{۱}{\alpha+۱}=\frac{\alpha}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{\beta}{۳}=\frac{\alpha}{۳}+\frac{\beta}{۳}=\frac{\alpha+\beta}{۳}$$

از طرفی با توجه به معادله $\alpha+\beta=-۱$ است. پس:

$$\frac{\alpha+\beta}{۳}=-\frac{۱}{۳}$$

---

130 ۲ ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰$ معکوس یک‌دیگرند، پس:

$$x_۱=\frac{۱}{x_۲}\Rightarrow x_۱x_۲=۱\Rightarrow P=\frac{c}{a}=۱\Rightarrow\frac{m^۲-۲}{m}=۱\Rightarrow m^۲-۲=m$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow m=-۱\ ,\ m=۲$$

به ازای $m=۲$ معادله فاقد ریشهٔ حقیقی است، زیرا:

$$m=۲:۲x^۲+۳x+۲=۰\Rightarrow\Delta=۹-۴(۲)(۲)=-۷<۰$$

---

131 ٤ در معادلهٔ $۲x^۲-(m+۱)x+\frac{۱}{۸}=۰$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$S=-\frac{-(m+۱)}{۲}=\frac{m+۱}{۲}\ ,\ P=\frac{\frac{۱}{۸}}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادله برابر ۲ است، پس:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲\Rightarrow\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=۲\Rightarrow S+۲\sqrt{P}=۴$$

$$\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=۴\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۴$$

$$\Rightarrow\frac{m+۲}{۲}=۴\Rightarrow m+۲=۸\Rightarrow m=۶$$

---

132 ۱ در معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$S=-\frac{-(m+۳)}{m}=\frac{m+۳}{m}\ ,\ P=\frac{۵}{m}$$

اگر ریشه‌های معادله α و β باشند، با توجه به صورت تست داریم:

$$\alpha^۲+\beta^۲=۶\Rightarrow S^۲-۲P=۶$$

حال به جای S و P در رابطهٔ $S^۲-۲P=۶$ جایگذاری می‌کنیم:

$$S^۲-۲P=۶\Rightarrow\frac{(m+۳)^۲}{m^۲}-۲(\frac{۵}{m})=۶\Rightarrow\frac{m^۲+۶m+۹-۱۰m}{m^۲}=۶$$

$$\Rightarrow m^۲-۴m+۹=۶m^۲\Rightarrow۵m^۲+۴m-۹=۰\xrightarrow[\text{برابر صفر}]{\text{مجموع ضرایب}}\begin{cases}m=۱\\m=\frac{-۹}{۵}\end{cases}$$

حال به ازای هر کدام از mهای به‌دست آمده شرط حقیقی بودن ریشه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$m=۱:x^۲-۴x+۵=۰\Rightarrow\Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(۵)=۱۶-۲۰=-۴<۰$$

$$m=\frac{-۹}{۵}:\frac{-۹}{۵}x^۲-\frac{۶}{۵}x+۵=۰\Rightarrow\Delta=(\frac{-۶}{۵})^۲-۴(\frac{-۹}{۵})(۵)=\frac{۳۶}{۲۵}+۳۶>۰$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول $m=-\frac{۹}{۵}$ است. [البته در این حالت نیازی به چک کردن Δ نبود، چون a و c مختلف‌العلامه بودند معادله قطعاً دو ریشه داشت]

---

133 ۲ اگر ریشه‌های معادله را α,β فرض کنیم طبق فرض مسئله رابطهٔ $\alpha=\frac{\beta}{۲}+۵$ بین ریشه‌های معادله برقرار است. از طرفی با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر است با $\alpha+\beta=-\frac{-۸}{۱}=۸$ بنابراین:

$$\frac{\beta}{۲}+۵+\beta=۸\Rightarrow\frac{۳\beta}{۲}=۳\Rightarrow\beta=۲$$

چون $\beta=۲$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$۲^۲-۸\times۲+m=۰\Rightarrow m=۱۲$$

---

134 ۳ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1 ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۴x-۱=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{-۴}{۳}=\frac{۴}{۳}\ ,\ P=\alpha\beta=-\frac{۱}{۳}$$

2 ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+ax+b=۰$ برابر $\alpha+۱,\beta+۱$ است. حاصل‌ضرب این ریشه‌ها برابر است با:

$$P_{new}=\frac{b}{۳}\Rightarrow(\alpha+۱)(\beta+۱)=\frac{b}{۳}\Rightarrow\alpha\beta+\alpha+\beta+۱=\frac{b}{۳}$$

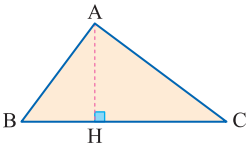
$$\Rightarrow-\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳}+۱=\frac{b}{۳}\Rightarrow\frac{b}{۳}=۲\Rightarrow b=۶$$

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON پاسخ‌نامه

154 ابتدا نقطهٔ A یعنی محل برخورد ضلع‌های AB و AC را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2y-x=3 \\ y-2x=5 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{7}{3},\ y=\frac{1}{3} \Rightarrow A(-\frac{7}{3},\frac{1}{3})$$

حال شیب خط BC را قرینه و عکس می‌کنیم تا شیب AH به دست آید:



$$m_{BC}=-\frac{3}{2} \Rightarrow m_{AH}=\frac{2}{3}$$

بنابراین معادلهٔ AH برابر است با:

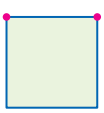
$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(x+\frac{7}{3}) \xrightarrow{\times 9} 9y-6x=17$$

155 اگر سه نقطه روی یک خط راست باشند، شیب خطی که از هر دو نقطهٔ دلخواه می‌گذرد باهم برابر است. پس:

$$\begin{cases} m_{AB}=\frac{5-4}{a-2}=\frac{1}{a-2} \\ m_{AC}=\frac{1-4}{(2-a)-2}=\frac{-3}{-a}=\frac{3}{a} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m_{AB}=m_{AC}} \frac{1}{a-2}=\frac{3}{a} \Rightarrow 3a-6=a \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

156 فاصلهٔ دو نقطهٔ A(2,4) و B(−1,8) برابر طول ضلع مربع است:



$$AB=\sqrt{(-1-2)^2+(8-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با: $S=5^2=25$

157 ابتدا طول اضلاع را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(-1-3)^2+(0-5)^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$$

$$AC=\sqrt{(-1-4)^2+(0+4)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

$$BC=\sqrt{(4-3)^2+(-4-5)^2}=\sqrt{1+81}=\sqrt{82}$$

چون طول اضلاع AB و AC برابر است، مثلث متساوی‌الساقین است. همچنین رابطهٔ فیثاغورس میان اضلاع آن برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه نیز هست:

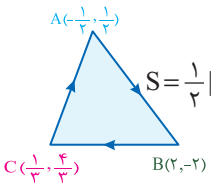
$$(\sqrt{41})^2+(\sqrt{41})^2=(\sqrt{82})^2$$

158 محل برخورد دو به دو خط‌ها را می‌یابیم تا مختصات رئوس مثلث به‌دست آید:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \qquad \begin{cases} y=x+1 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Rightarrow B(2,-2)$$

حال مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:



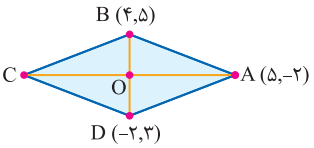
$$S=\frac{1}{2}|(\frac{-1}{2})(-2-\frac{4}{3})+2(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-(-2))|$$

$$=\frac{1}{2}|\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{6}|=\frac{1}{2}\times\frac{25}{6}=\frac{25}{12}$$

در هر مثلث دلخواه، با داشتن مختصات رأس‌های A, B, C می‌توانیم مساحت را از رابطهٔ زیر به دست آوریم:

$$S=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

159 رأس C قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به O است. می‌دانیم که قطرهای لوزی یک‌دیگر را نصف می‌کنند پس نقطهٔ O وسط رأس‌های B و D قرار دارد. بنابراین:



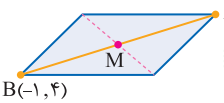
$$O=\frac{B+D}{2} \Rightarrow O=(\frac{4+(-2)}{2},\frac{5+3}{2})=(1,4)$$

$$O=\frac{A+C}{2} \Rightarrow C=2O-A \Rightarrow C=(2,8)-(5,-2)=(-3,10)$$

160 ابتدا محل برخورد دو ضلع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 3y+4x=8 \\ 2y-3x=11 \end{cases} \Rightarrow x=-1,\ y=4 \Rightarrow B(-1,4)$$

از آن‌جایی که مختصات رأس A(7,6) در هیچ‌کدام از خط‌ها صدق می‌کند، پس نقطهٔ A روی این دو خط قرار ندارد. در نتیجه نقطهٔ B روبه‌روی A قرار دارد. پس نقطهٔ وسط آن‌ها محل برخورد قطرها است:



$$M(\frac{7-1}{2},\frac{6+4}{2}) \Rightarrow M(3,5)$$

161 می‌دانیم که فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس برابر با اندازهٔ شعاع دایره است یعنی فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $x-2y-1=0$ برابر $\sqrt{5}$ است. نقطهٔ O روی نیمساز ربع اول و سوم و در نتیجه مختصات آن به‌صورت (α,α) است، بنابراین:

$$r=OH=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha-2\alpha-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|1+\alpha|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |1+\alpha|=5 \Rightarrow 1+\alpha=\pm 5 \Rightarrow \alpha=4,\ \alpha=-6$$

با توجه به گزینه‌ها $\alpha=4$ جواب صحیح است.

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ به معادلهٔ d از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

162 اولاً چون دو خط موازی‌اند، پس شیب‌های برابر دارند:

$$\begin{cases} d_1: 2y-x=7 \xrightarrow{\times 2} 4y-2x=14 \\ d_2: 4y-ax=2 \end{cases} \xrightarrow[\text{باید با هم برابر باشد}]{\text{ضرایب x در دو معادله}} a=2$$

سپس فاصلهٔ دو خط را، که همان قطر دایره است، به‌دست می‌آوریم:

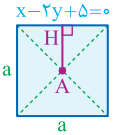
$$2r=\frac{|14-2|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{12}{\sqrt{20}}=\frac{12}{2\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow r=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S=\pi r^2=\pi(\frac{3}{\sqrt{5}})^2=\pi(\frac{9}{5})=1/8\pi$$

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

163 فاصلهٔ نقطهٔ A از ضلع برابر نصف طول ضلع است:



$$AH=\frac{|3-2(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$$\frac{a}{2}=2\sqrt{5} \Rightarrow a=4\sqrt{5} \Rightarrow S=a^2=(4\sqrt{5})^2=80$$

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

177 ۳

۱ عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:

$x^۲-۳x>۰ \Rightarrow x(x-۳)>۰ \Rightarrow x<۰ \cup x>۳$

۲ عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد:

$۰ \le ۱-\log(x^۲-۳x) \Rightarrow \log(x^۲-۳x) \le ۱ \Rightarrow x^۲-۳x \le ۱۰$

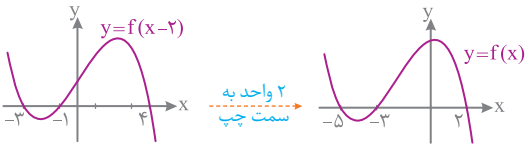
$\Rightarrow x^۲-۳x-۱۰ \le ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) \le ۰ \Rightarrow -۲ \le x \le ۵$

از اشتراک ۱ و ۲ دامنهٔ تابع به صورت $[-۲,۰) \cup (۳,۵]$ به‌دست می‌آید.

$x=۰$ جلوی لگاریتم را صفر می‌کند، پس ۱, ۲ حذف می‌شوند. با قرار دادن $x=۶$ عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود، پس ۴ نیز حذف می‌شود.

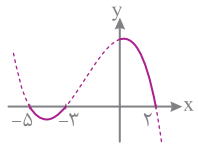
178 ٤

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



حال برای تعیین دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \ge ۰$ باشد:

$\begin{cases} x \ge ۰, f(x) \ge ۰ \\ x \le ۰, f(x) \le ۰ \end{cases}$ راست و بالای محور xها / چپ و پایین محور xها



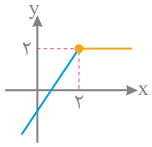
بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $[-۵,-۳] \cup [۰,۲]$ است.

با جای‌گذاری $x=-۱$ در تابع به عبارت $\sqrt{-f(-۱)}$ می‌رسیم. از آن‌جایی که $f(-۱)$ مثبت است، پس عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود و گزینه‌های ۱, ۲, ۳ حذف می‌شوند.

179 ۱

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

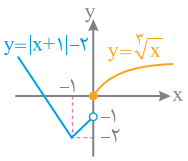
$f(x)=x-|x-۲|=\begin{cases} ۲ & ; x \ge ۲ \\ ۲x-۲ & ; x<۲ \end{cases}$



بنابراین بُرد تابع برابر بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.

180 ۳

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt[۳]{x} & ; x \ge ۰ \\ |x+۱|-۲ & ; x<۰ \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین برد تابع f برابر بازهٔ $R_f=[-۲,+\infty)$ است.

181 ۱

چون $x^۲$ عبارتی نامنفی است، پس $\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ مثبت بوده و چون مخرج از صورت یک واحد بیشتر است، پس حاصل $\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ عددی کوچک‌تر از یک خواهد بود، بنابراین برد تابع بازهٔ $[۰,۱)$ است.

182 ۳

برای این که مشخص کنیم در کدام بازه، نمودار تابع $y=-x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}$ بالاتر از نمودار تابع $y=۲x+|x|$ قرار گرفته است، باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $-x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x+|x|$ را به‌دست آوریم. بنابراین:

۱ $x \ge ۰ : -x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x+x \Rightarrow -x^۲-\frac{۷}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۰$

$\Rightarrow \underbrace{x^۲+\frac{۷}{۲}x-\frac{۹}{۲}}_{(x-۱)(x+\frac{۹}{۲})}<۰ \Rightarrow -\frac{۹}{۲}<x<۱ \xrightarrow{x \ge ۰} ۰ \le x<۱$

۲ $x<۰ : -x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x-x \Rightarrow -x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۰$

$\Rightarrow \underbrace{x^۲+\frac{۳}{۲}x-\frac{۹}{۲}}_{(x+۳)(x-\frac{۳}{۲})}<۰ \Rightarrow -۳<x<\frac{۳}{۲} \xrightarrow{x<۰} -۳ \le x<۰$

از اجتماع بازه‌های به‌دست آمده از ۱, ۲ مجموعه جواب نامعادله برابر بازهٔ $(-۳,۱)$ می‌شود که طول وسط آن برابر $\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$ است.

183 ٤ بررسی گزینه‌ها:

۱ $D_f=(۰,+\infty), D_g=\mathbb{R}-\{۰\} \Rightarrow f \ne g$

۲ $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}, D_g=\mathbb{R} \Rightarrow f \ne g$

۳ $D_f=[۰,+\infty), D_g=\mathbb{R} \Rightarrow f \ne g$

۴ $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\} \Rightarrow f=g$

184 ٤ بررسی گزینه‌ها:

۱ $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}, D_g=\mathbb{R} \Rightarrow f \ne g$

۲ دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}$ است ولی ضابطهٔ تابع f بعد از ساده شدن به‌صورت $f(x)=|x|$ می‌باشد، پس $f \ne g$ است.

۳ $D_f=\mathbb{R}-[۰,۱), D_g=\mathbb{R}-\{۰\} \Rightarrow f \ne g$

۴ دامنهٔ هر دو تابع $[-۱,۱]$ و ضابطه‌هایشان هم یکسان است، پس $f=g$ می‌باشد

185 ٤

دامنهٔ تابع $f=\log(\frac{x-۲}{x})$ را به دست می‌آوریم:

$\frac{x-۲}{x}>۰$ ⇒

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
f		+	ت ن	−	۰	+	

$\Rightarrow (-\infty,۰) \cup (۲,+\infty)$

حال دامنهٔ هریک از گزینه‌ها را مشخص می‌کنیم:

۱ $y=\log(x-۲)-\log x \Rightarrow \begin{cases} x-۲>۰ \\ x>۰ \end{cases} \Rightarrow x>۲$

۲ $y=\log\frac{(x-۲)(x+۲)}{x(x+۲)} \Rightarrow D_y=(-\infty,۰) \cup (۲,+\infty)-\{-۲\}$

۳ $y=\frac{۱}{۲}\log(\frac{x-۲}{x})^۲ \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

۴ $y=۲\log\sqrt{\frac{x-۲}{x}} \Rightarrow D_y=(-\infty,۰) \cup (۲,+\infty)$

$x=-۲$ در تابع f صدق می‌کند، اما در ۱, ۲ صدق نمی‌کند. از طرفی $x=۱$ در ۳ صدق می‌کند اما در f صدق نمی‌کند.

gajmarket.com خرید آنلاین در
ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

۲۸۸ ۳ ابتدا با استفاده از تعریف لگاریتم مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\log_۲(۶+\log_۳ x)=۳\Rightarrow ۶+\log_۳ x=۲^۳=۸\Rightarrow \log_۳ x=۲$$

$$\Rightarrow x=۳^۲=۹\Rightarrow \log_۲(x-۱)=\log_۲ ۸=\log_۲ ۲^۳=۳$$

۲۸۹ ۴ ابتدا A را به دست می‌آوریم:

$$A=\log_۸ ۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}=\log_۸ ۲\times(\frac{۱}{۴})^{\frac{۱}{۳}}=\log_۸ ۲\times(۲^{-۲})^{\frac{۱}{۳}}$$

$$=\log_{۲^۳} ۲\times ۲^{-\frac{۲}{۳}}=\log_{۲^۳} ۲^{\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۳}\log_۲ ۲=\frac{۱}{۹}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\log_۴(\frac{۱}{A}-۱)=\log_۴(۹-۱)=\log_۴ ۸=\log_{۲^۲} ۲^۳=\frac{۳}{۲}$$

۲۹۰ ۲

$$\log_{\sqrt{۳}} a=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a=(\sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}}=(۳^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۴}{۳}}=۳^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow \log_۸(a^۳+۷)=\log_۸((۳^{\frac{۲}{۳}})^۳+۷)=\log_۸(۳^۲+۷)$$

$$=\log_۸ ۱۶=\log_{۲^۳} ۲^۴=\frac{۴}{۳}$$

۲۹۱ ۳ از $\log_۲ ۱۲=a$ نتیجه می‌گیریم $۲^a=۱۲$ است. پس:

$$۴^{a-۲}=\frac{۴^a}{۴^۲}=\frac{(۲^a)^۲}{۱۶}=\frac{۱۲^۲}{۱۶}=\frac{۱۴۴}{۱۶}=۹$$

۲۹۲ ۴ روش اول:

$$\log_۳ ۹A^۲=\log_۳ ۹+\log_۳(۳^a)^۲=\underbrace{\log_۳ ۳^۲}_{۲\log_۳ ۳}+\underbrace{\log_۳ ۳^{۲a}}_{۲a\log_۳ ۳}=۲+۲a$$

روش دوم: از $۳^a=A$ نتیجه می‌گیریم $\log_۳ A=a$ است، بنابراین:

$$\log_۳ ۹A^۲=\log_۳ ۹+\log_۳ A^۲=۲+۲\log_۳ A=۲+۲a$$

۲۹۳ ۱ ابتدا لگاریتم خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\log\sqrt[۳]{۱/۶}=\log(\frac{۱۶}{۱۰})^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\underbrace{(\log ۱۶-\log ۱۰)}_{\log ۲^۴-۱}=\frac{۱}{۳}(۴\log ۲-۱)$$

حال از آن‌جایی که $\log ۲=۱-\log ۵$ پس $\log ۲=۱-۳k$، بنابراین:

$$\frac{۱}{۳}(۴(۱-۳k)-۱)=\frac{۱}{۳}(۴-۱۲k-۱)=\frac{۱}{۳}(۳-۱۲k)=۱-۴k$$

۲۹۴ ۱ از آنجایی که $\log ۳=a$ و $\log ۲=۱-\log ۵=۱-b$ است، داریم:

$$\log ۲۴=\log ۳\times ۲^۳=\log ۳+\log ۲^۳=\underbrace{\log ۳}_{a}+۳\underbrace{\log ۲}_{۱-b}=a-۳b+۳$$

۲۹۵ ۳ اگر یک لگاریتم در مبنایی داده شود و حاصل یک لگاریتم در مبنای دیگری خواسته شود، به‌طوری که مبناها به یک‌دیگر قابل تبدیل نباشند، از قانون تغییر مبنا استفاده می‌کنیم. چون یک لگاریتم در مبنای ۱۰ داده شده و حاصل یک لگاریتم دیگر در مبنای ۵ را می‌خواهیم، پس:

$$\log_۵ ۱۶=\frac{\log ۱۶}{\log ۵}=\frac{\log ۲^۴}{\log ۵}=\frac{۴\log ۲}{\log ۵}\xrightarrow{\log ۵=۱-\log ۲}\frac{۴\log ۲}{۱-\log ۲}$$

$$\Rightarrow \log_۵ ۱۶=\frac{۴\times ۰/۳}{۱-۰/۳}=\frac{۱/۲}{۰/۷}=\frac{۱۲}{۷}$$

۲۹۶ ۲ با توجه به قانون اعداد با توان لگاریتمی، خواهیم داشت:

$$\sqrt{۱۰^{\log ۵+۳\log ۲}}=\sqrt{۱۰^{\log ۵+\log ۸}}=\sqrt{۱۰^{\log ۴۰}}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

۲۹۷ ۲ ضریب پشت لگاریتم را به توان عبارت جلوی لگاریتم منتقل می‌کنیم:

$$\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+\sqrt{۵})^۲$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+۲\sqrt{۵}+۵)=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})=\log(۶^۲-(۲\sqrt{۵})^۲)$$

$$=\log(۳۶-۲۰)=\log ۱۶=۴\log ۲=۴k$$

۲۹۸ ۴ برای تعیین دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{(x-۵)}(۱۴-x)$ داریم:

$$۱۴-x>۰\Rightarrow ۱۴>x$$

$$x-۵>۰\Rightarrow x>۵$$

$$x-۵\neq ۱\Rightarrow x\neq ۶$$

$\Rightarrow x\in(۵,۶)\cup(۶,۱۴)$

دامنهٔ این تابع شامل ۷ عدد صحیح است که عبارت‌اند از: ۷,۸,...,۱۳

۲۹۹ ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log(۲x-۱)+\frac{۱}{۲}\log x^۲=\log ۳\Rightarrow \log(۲x-۱)+\log\sqrt{x^۲}=\log ۳$$

$$\Rightarrow \log(۲x-۱)+\log|x|=\log ۳$$

حال چون دامنهٔ معادله $x>\frac{۱}{۲}$ است، پس $|x|=x$ و داریم:

$$\log(۲x-۱)+\log x=\log ۳\Rightarrow \log(۲x-۱)x=\log ۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-x=۳\Rightarrow ۲x^۲-x-۳=۰\xrightarrow{b=a+c} x=\frac{۳}{۲}, x=-۱$$

$$\log_۴\frac{x}{۳}=\log_۴\frac{\frac{۳}{۲}}{۳}=\log_۴\frac{۱}{۲}=\log_{۲^۲} ۲^{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۳۰۰ ۲

$$\log(x^۲-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)$$

$$\Rightarrow \log(\frac{x^۲-x-۶}{x-۳})=\log(۲x-۵)\Rightarrow \frac{(x-۳)(x+۲)}{x-۳}=۲x-۵$$

$$\Rightarrow x+۲=۲x-۵\Rightarrow x=۷$$

$$\Rightarrow \log_۴\sqrt[۳]{x+۱}=\log_۴\sqrt[۳]{۷+۱}=\log_۴\sqrt[۳]{۸}=\log_۴ ۲=\frac{۱}{۲}$$

۳۰۱ ۳

1 $\log(y+۲)=۱\Rightarrow y+۲=۱۰\Rightarrow y=۸$

2 $\log(y-x)+\log(۴x+y)=۲\Rightarrow \log(۸-x)+\log(۴x+۸)=۲$

$$\Rightarrow \log(۸-x)(۴x+۸)=۲\Rightarrow ۴(۸-x)(x+۲)=۱۰^۲=۱۰۰$$

$$\Rightarrow (۸-x)(x+۲)=۲۵\Rightarrow ۸x+۱۶-x^۲-۲x=۲۵$$

$$\Rightarrow x^۲-۶x+۹=۰\Rightarrow (x-۳)^۲=۰\Rightarrow x=۳$$

۳۰۲ ۱ از معادلهٔ $\log_۳ x+\log_۳ y=۲$ داریم:

$$\log_۳ xy=۲\Rightarrow xy=۳^۲=۹$$

از طرفی $x^۲+y^۲=۴۶$ است، بنابراین با استفاده از اتحاد زیر عبارت $(x+y)$ را به دست می‌آوریم:

$$(x+y)^۲=x^۲+y^۲+۲xy=۴۶+۲\times ۹=۶۴\Rightarrow x+y=۸ \text{ یا } -۸$$

$$\log_۴(x+y)=\log_۴ ۸=\log_{۲^۲} ۲^۳=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

gajmarket.com خرید آنلاین در ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

330 ۳ دوزاویهٔ $22/5^\circ$ و $67/5^\circ$ متمم‌اند. بنابراین $\sin 67/5^\circ = \cos 22/5^\circ$ است. درنتیجه به‌جای محاسبهٔ مقدار $\sin 67/5^\circ$، مقدار معادل، یعنی $\cos 22/5^\circ$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos^2 22/5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 67/5^\circ = \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

---

331 ۳

$$\frac{\sqrt{1+\cos 20^\circ}}{\cos^4 5^\circ - \sin^4 5^\circ} = \frac{\sqrt{2\cos^2 10^\circ}}{(\cos^2 5^\circ - \sin^2 5^\circ)\underbrace{(\cos^2 5^\circ + \sin^2 5^\circ)}_{1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \sqrt{2}$$

---

332 ۱ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

---

333 ۱ در تست‌هایی که صحبت از $\sin\theta \pm \cos\theta$ می‌شود، می‌توانیم با به توان رساندن طرفین عبارت داده شده، عبارت $\sin 2\theta$ را ایجاد کنیم.

ابتدا عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) \overset{\text{ربع سوم}}{=} -\sin 2\alpha$$

حال از تساوی داده شده، مقدار $\sin 2\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

---

334 ۴ ابتدا $\sin\alpha$ را محاسبه کرده و سپس از اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi} \sin\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin\alpha} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

به روابط زیر دقت کنید:

1. $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$
2. $\tan\alpha - \cot\alpha = -2\cot 2\alpha$

---

335 ۳ از تساوی داده شده داریم:

$$\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow -2\cot x = 1 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$

حال با استفاده از رابطهٔ $\tan 2x$ خواهیم داشت:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\times(-2)}{1-(-2)^2} = \frac{-4}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

---

336 ۱ صورت کسر را با استفاده از رابطهٔ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ و مخرج کسر را با استفاده از رابطهٔ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\tan\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{ربع دوم}} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

---

337 ۲ می‌دانیم:

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

حال از تساوی داده شده داریم:

$$\tan\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

بنابراین حاصل $\cos 2x$ برابر است با:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 2\times\frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

---

338 ۲

$$\frac{\sin 40^\circ\cos 20^\circ + \cos 40^\circ\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ\cos 20^\circ - \sin 40^\circ\sin 20^\circ} = \frac{\sin(40^\circ + 20^\circ)}{\cos(40^\circ + 20^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

روابط $\sin(\alpha\pm\beta)$ و $\cos(\alpha\pm\beta)$ به صورت زیر است.

1. $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

---

339 ۳ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}\overbrace{\sin(45^\circ - 15^\circ)}^{\sin 30^\circ}}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$$

روابط $\cos\alpha \pm \sin\alpha$ به صورت زیر است:

1. $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$
2. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

---

340 ۱ ابتدا حاصل $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha$$

حال از آن‌جایی که $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ است خواهیم داشت:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\xrightarrow{\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi} \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\alpha = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

361 ۳ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم: $y = 1 + a\sin bx\cos bx = 1 + a\frac{1}{2}\sin 2bx = 1 + \frac{a}{2}\sin 2bx$

باتوجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است، پس:

$$1 + |\frac{a}{2}| = \frac{3}{2} \Rightarrow |\frac{a}{2}| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع برابر $T = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$ است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

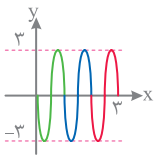
از آن‌جایی که نمودار در آغاز رسم در مبدأ به طرف بالا می‌رود، پس a و b هر دو مثبت یا هردو منفی هستند. با توجه به گزینه‌ها a و b را مثبت درنظر می‌گیریم، پس: $a + b = 1 + 1 = 2$

---

362 ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = a\cos\pi(\frac{1}{2} - bx) = a\cos(\frac{\pi}{2} - b\pi x) = a\sin b\pi x$$

با توجه به نمودار بیشترین مقدار تابع برابر ۳



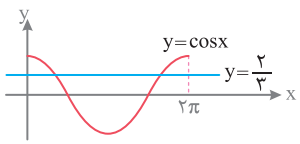
است، پس $a = \pm 3$. از طرفی دورهٔ تناوب تابع برابر ۱ است. پس:

$$T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

از آنجایی که نمودار ابتدا نزولی است، پس a و b هم‌علامت نیستند، بنابراین $a.b = -6$ است.

---

363 ۱ از معادلهٔ $3\cos x - 2 = 0$ به‌معادلهٔ $\cos x = \frac{2}{3}$ می‌رسیم.



مطابق شکل معادلهٔ $\cos x = \frac{2}{3}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای ۲ جواب است:

---

364 ۲ ابتدا معادله را به‌صورت $\cos 3x = -\cos x$ می‌نویسیم و با استفاده از رابطهٔ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ، ضریب منفی را از بین می‌بریم:

$$\cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} & \checkmark \\ 3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} & \times \end{cases}$$

$\cos x \neq 0$

---

365 ٤ می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ است، پس:

$$\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + (-x) \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \xrightarrow[k=0,1,2,3]{x\in[0,2\pi]} x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi \\ x = 2k\pi + \pi \xrightarrow[k=0]{x\in[0,2\pi]} x = \pi \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با: $0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$

---

366 ۳ ابتدا $\cos 2x$ را به‌سمت راست تساوی منتقل می‌کنیم که معادله به‌صورت $\sin 3x = -\cos 2x$ درمی‌آید. سپس با توجه به این که $-\cos 2x$ برابر با $\sin(\frac{3\pi}{2} - 2x)$ است، سمت راست معادله را به سینوس تبدیل می‌کنیم:

$$\sin 3x = \sin(\frac{3\pi}{2} - 2x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\frac{3\pi}{2} - 2x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{3\pi}{2} - 2x) \end{cases}$$

حال در هر یک از تساوی‌ها همهٔ xها را به یک طرف برده و ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} \xrightarrow{x\in[0,\pi]} x = \frac{3\pi}{10}, x = \frac{7\pi}{10} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x\in[0,\pi]} \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ دارای ۲ جواب است.

---

367 ۱ به جای $\sin^2 x$ معادل آن یعنی $1 - \cos^2 x$ را قرار می‌دهیم تا به یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $\cos x$ برسیم:

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$\Rightarrow -2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm 5}{-4}$$

$$\Rightarrow \cos x = 2, \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

---

368 ۳ با استفاده از رابطهٔ $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ داریم:

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

---

369 ٤ می‌دانیم $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$ است. بنابراین در معادلهٔ مثلثاتی $4\sin x\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ داریم:

$$4\sin x(-\cos x) = 1 \Rightarrow 2\sin x\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow[k=1,2]{x\in[0,2\pi]} x = \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow[k=0,1]{x\in[0,2\pi]} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

در نتیجه مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{11\pi}{12} + \frac{23\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \frac{19\pi}{12} = \frac{(11+23+7+19)\pi}{12} = \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

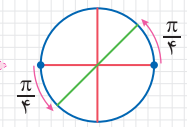
---

370 ۱ $2\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 \Rightarrow \underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\cos 2x} + \sin 2x = 0$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow[\sin\alpha = -\cos\alpha]{\text{جواب کلی}} 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

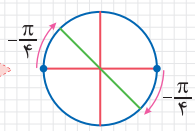
جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\alpha = \cos\alpha$ و $\sin\alpha = -\cos\alpha$ به صورت زیر است:

$\sin\alpha = \cos\alpha$



$\Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}$

$\sin\alpha = -\cos\alpha$



$\Rightarrow \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4}$

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

392 ۳ بررسی گزینه‌ها:

۱ $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱}(x^۲-۳x+۲)=۶$

۲ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲-۳x+۲)=۰\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x^۲-۱)=۰\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۰$

۳ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(x^۲-۱)=۸\\ \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(۲x-۵)=۱\end{cases}\Rightarrow$ وجود ندارد: $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$

۴ $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=\lim\limits_{x\to ۴}(۲x-۵)=۳$

---

393 ۳ با توجه به ضابطهٔ توابع f و g، داریم:

۱ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to ۱^+}(۳x+۱+x-۲)=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+۶+۲x)=۹\end{cases}$

۱ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{۳x+۱}{x-۲}=-۴\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{x^۲+۶}{۲x}=\dfrac{۷}{۲}\end{cases}$

۳ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to ۱^+}(۳x+۱-(x-۲))=۵\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+۶-(۲x))=۵\end{cases}$

۴ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to ۱^+}((۳x+۱).(x-۲))=-۴\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to ۱^-}((x^۲+۶).(۲x))=۱۴\end{cases}$

---

394 ۳ با توجه به تساوی داده‌شده داریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲}{f(x)-۳}=۱\Rightarrow\frac{۲}{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)-۳}=۱\Rightarrow\lim_{x\to ۳} f(x)-۳=۲$$

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۵\Rightarrow\lim_{x\to ۳}\sqrt{f(x)+۴}=\sqrt{\lim_{x\to ۳} f(x)+۴}=\sqrt{۵+۴}=۳$$

---

395 ٤ وقتی $x\to ۰^-$ داریم:

$$x\to ۰^-\Rightarrow x<۰\Rightarrow [x]=-۱,\ |x|=-x$$

حال حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۴[x]-|x|}{|x|-[x]}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۴(-۱)-(-x)}{(-x)-(-۱)}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۴+x}{-x+۱}=\frac{-۴}{۱}=-۴$$

---

396 ٤ برای این که تابع در $x=۰$ دارای حد باشد، باید حد راست و حد چپ آن در این نقطه برابر باشند:

۱ $x\to ۰^+\Rightarrow x>۰\Rightarrow |x|=x,\ [x]=۰$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{a(x)}{x}-۴(۰)\right)=a$$

۲ $x\to ۰^-\Rightarrow x<۰\Rightarrow |x|=-x,\ [x]=-۱$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{a(-x)}{x}-۴(-۱)\right)=-a+۴$$

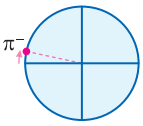
بنابراین از ۱ و ۲ داریم:

$$a=-a+۴\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

---

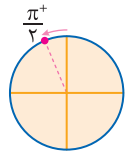
397 ۱ با کمک دایرهٔ مثلثاتی، حاصل هریک از حدها را به دست می‌آوریم:

$x\to \pi^-$:



$$\lim_{x\to \pi^-}\frac{\sin x}{|\sin x|}=\lim_{x\to \pi^-}\frac{\sin x}{\sin x}=۱$$

$x\to \frac{\pi^+}{۲}$:



$$\lim_{x\to \frac{\pi^+}{۲}}[\cos x]=-۱$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر $۰+(-۱)=۱$ است.

---

398 ۳ چون نمودار تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است.

پس وقتی $x\to \frac{\pi^+}{۳}$ مقدار $\tan x$ کمی بیش‌تر از $\sqrt{۳}$ و وقتی $x\to \frac{\pi^-}{۳}$ مقدار $\tan x$ کمی کمتر از $\sqrt{۳}$ خواهد شد:

$$\lim_{x\to \frac{\pi^+}{۳}}([\sin(x-\frac{\pi}{۳})]\cos ۳x+[\tan^۲ x])=[۰^+](-۱)+[۳^+]=۰+۳=۳$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi^-}{۳}}([\sin(x-\frac{\pi}{۳})]\cos ۳x+[\tan^۲ x])=[۰^-](-۱)+[۳^-]=۱+۲=۳$$

بنابراین حد عبارت برابر ۳ است.

---

399 ۱ چون تابع f در $x=-۱$ حد دارد، پس حد چپ و حد راست آن در $x=-۱$ باهم برابر هستند:

۱ $x\to (-۱)^-\Rightarrow x<-۱\Rightarrow [x]=-۲,\ |x|=-x$

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-}\frac{x^۲+[x]}{|x|}=\lim_{x\to (-۱)^-}\frac{x^۲-۲}{-x}=\frac{۱-۲}{۱}=-۱$$

۲ $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^+}(۳x+a)=-۳+a$

بنابراین خواهیم داشت: $-۳+a=-۱\Rightarrow a=۲$

---

400 ۳ چون حد تابع f در $x=-۱$ برابر ۵ است، پس حد راست و حد چپ تابع نیز برابر ۵ هستند:

۱ $x\to (-۱)^+\Rightarrow x>-۱\Rightarrow [x]=-۱,\ |x|=-x$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^+}((b+۱)[x]+|x|)=\lim_{x\to (-۱)^+}(-(b+۱)-x)$$

$$=-(b+۱)-(-۱)=-b-۱+۱=-b\Rightarrow -b=۵\Rightarrow b=-۵$$

۲ $x\to (-۱)^-\Rightarrow x<-۱\Rightarrow [x]=-۲$

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-}(a[x]+۲bx-۱)=\lim_{x\to (-۱)^-}(-۲a+۲(-۵)x-۱)$$

$$=-۲a-۱۰(-۱)-۱=-۲a+۹=۵\Rightarrow -۲a=-۴\Rightarrow a=۲$$

---

401 ۲ ابتدا باید مشخص کنیم وقتی $x\to ۰^-$ عبارت $x^۳-x$ چه وضعی دارد:

$$x\to ۰^-\Rightarrow \overbrace{x}^{-}\overbrace{(x^۲-۱)}^{-}\to ۰^+\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} f(x^۳-x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)$$

بنابراین باید از ضابطهٔ بالا استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{۱-x}=\sqrt{۱-۰}=۱$$

gajmarket.com خرید آنلاین در ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

478 ۳ در صورت کسر $f(۴)$ را اضافه و کم می‌کنیم تا بتوانیم حد داده‌شده را به تعریف مشتق تبدیل کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴)+f(۴)-f(۴-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴)}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴)-f(۴-h)}{h}$$
$$=۳\lim_{۳h\to ۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴)}{۳h}+\lim_{-h\to ۰}\frac{f(۴-h)-f(۴)}{-h}$$
$$=۳f'(۴)+f'(۴)=۴f'(۴)=۴\times\frac{۳}{۲}=۶$$

479 ۳ با استفاده از رابطهٔ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$$

حد ایجاد شده برابر تعریف مشتق تابع $y=\sin x$ در نقطهٔ $x=a$ است، پس حاصل حد برابر $\cos a$ است.

480 ۲ می‌دانیم اگر نمودار تابع f در $x=a$ تو خالی باشد، برای محاسبهٔ مشتق توابع به صورت $y=(x-a)f(x)$ در نقطهٔ $x=a$، باید از تعریف مشتق استفاده کنیم. پس برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=xf(x)$ در $x=۰$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

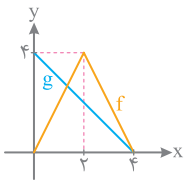
1 تابع $y=g(x)=xf(x)$ در $x=۰$ پیوسته است؛ زیرا:

$$\lim_{x\to ۰^+}xf(x)=\lim_{x\to ۰^-}xf(x)=g(۰)=۰$$

2 مشتق تابع $y=g(x)=xf(x)$ در $x=۰$ برابر است با:

$$y'=g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{xf(x)-۰}{x}=\lim_{x\to ۰}f(x)=-۱$$

481 ٤ مطابق شکل شیب خط مماس بر نمودار تابع f و g را در نقطهٔ $x=۱$ به ترتیب برابر $\frac{۴}{۲}=۲$ و $-\frac{۴}{۴}=-۱$ است، پس $f'(۱)=۲$ و $g'(۱)=-۱$ بوده و در نتیجه:



$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۲)+۲(-۱)=۴$$

482 ٤ نقطهٔ $A(-۲,۳)$ روی منحنی است. پس $f(-۲)=۳$ است. از طرفی دیگر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول -۲ برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین $f'(-۲)=\frac{۱}{۲}$ است، حال اگر $y=x^۲f(x)$ باشد خواهیم داشت:

$$y'=۲x\times f(x)+f'(x)\times x^۲\Rightarrow y'(-۲)=-۴\times f(-۲)+f'(-۲)\times ۴$$
$$\Rightarrow y'(-۲)=-۴(۳)+\frac{۱}{۲}(۴)=-۱۲+۲=-۱۴$$

483 ۲ مشتق تابع $f(x)=(۳x^۲-۷)(۲x-۵)^۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(۶x)(۲x-۵)^۳+۳\times ۲\times(۲x-۵)^۲(۳x^۲-۷)$$
$$\xrightarrow{x=۲}f'(۲)=(۱۲)(-۱)^۳+۶(-۱)^۲(۵)=-۱۲+۳۰=۱۸$$

484 ۲ حاصل عبارت خواسته شده برابر مشتق $(f.g)(x)$ در $x=۲$ است، پس:

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(x+\sqrt{x^۲-x})^۳(x-\sqrt{x^۲-x})^۳$$
$$=\left((x+\sqrt{x^۲-x})(x-\sqrt{x^۲-x})\right)^۳=(x^۲-(x^۲-x))^۳=x^۳$$
$$\Rightarrow f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=۳x^۲\Rightarrow f'(۲)g(۲)+g'(۲)f(۲)=۱۲$$

485 ۳ حد خواسته شده همان مشتق تابع f در $x=\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{(-۱)\sqrt{x}-(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(-x-۱)}{(\sqrt{x})^۲}$$

به ازای $x=\frac{۱}{۴}$ حاصل $\sqrt{x}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین:

$$f'(\tfrac{۱}{۴})=\frac{(-۱)\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱}(\frac{۱}{۴}+۱)}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

486 ۳ اگر ضابطهٔ f قبل از مشتق‌گیری ساده شود، بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم. در صورت کسر از $\sqrt{x}$ فاکتور گرفته و ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم، سپس $f'(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+۱\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۰$$
$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۴}$$

487 ۱ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\cos^۲\frac{\pi}{۳x}\Rightarrow f'(x)=۲\times\cos\frac{\pi}{۳x}\times(-\sin\frac{\pi}{۳x})\times\frac{-\pi}{۳x^۲}$$

به‌ازای $x=۴$ حاصل $\frac{\pi}{۳x}$ برابر $\frac{\pi}{۱۲}$ است، بنابراین:

$$f'(۴)=۲\cos\frac{\pi}{۱۲}\sin\frac{\pi}{۱۲}\times\frac{\pi}{۴۸}=\frac{\pi}{۴۸}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۴۸}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۹۶}$$

488 ۳ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sin^۳\sqrt{۲x}\Rightarrow f'(x)=۳(\sin^۲\sqrt{۲x})\times(\cos\sqrt{۲x})\times\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

به‌ازای $x=\frac{\pi^۲}{۱۸}$ حاصل $\sqrt{۲x}$ برابر $\sqrt{\frac{\pi^۲}{۹}}=\frac{\pi}{۳}$ است، پس:

$$f'(\tfrac{\pi^۲}{۱۸})=۳(\sin^۲\tfrac{\pi}{۳})(\cos\tfrac{\pi}{۳})\times\frac{۱}{\frac{\pi}{۳}}=۳\times(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲\times(\frac{۱}{۲})\times\frac{۳}{\pi}$$
$$=۳\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{\pi}=\frac{۲۷}{۸\pi}$$

489 ۳ ابتدا از تابع $f(x)=۲\sin^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=۲\times۲\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\times\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\times(۰-\frac{۱}{۴})$$

کمان $\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴}$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۳}$ برابر $\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۱۲}$ می‌شود. پس:

$$f'(\tfrac{\pi}{۳})=۲\times۲\sin(\tfrac{\pi}{۱۲})\cos(\tfrac{\pi}{۱۲})\times(-\tfrac{۱}{۴})=-\frac{۲}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}$$
$$=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

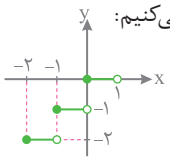
خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON
پاسخ‌نامه

556 ۳ می‌دانیم $f(x)=(x^۲-۲۸).x^{\frac{۱}{۳}}=x^{\frac{۷}{۳}}-۲۸x^{\frac{۱}{۳}}$ است. پس:

$$f'(x)=\frac{۷}{۳}x^{\frac{۴}{۳}}-\frac{۲۸}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۷}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}(x^۲-۴)=\frac{۷(x^۲-۴)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

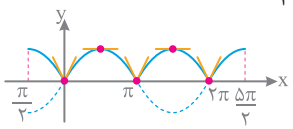
ریشه‌های صورت کسر f' برابر $x=\pm ۲$ و ریشهٔ مخرج کسر $x=۰$ است، که همگی عضو دامنهٔ f هستند. بنابراین مجموعهٔ طول نقاط بحرانی به‌صورت $\{-۲,۰,۲\}$ است.

557 ٤ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در بازهٔ $[-۲,۱)$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در نقاط صحیح ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در نقاط غیرصحیح نیز مشتق تابع برابر صفر است. پس تمام نقاط بازهٔ $[-۲,۱)$ بحرانی هستند.

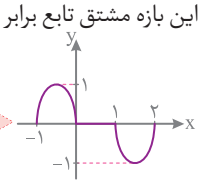
558 ٤ نمودار تابع f را در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ رسم می‌کنیم و نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم:



۵ نقطهٔ بحرانی دارد.

559 ٤ ابتدا تابع را در بازهٔ $[-۱,۲]$ به‌صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم. چون در بازهٔ $(۰,۱)$ تابع به‌صورت خط افقی $y=۰$ درمی‌آید، پس در تمام نقاط این بازه مشتق تابع برابر صفر بوده و در نتیجه نقاط بازهٔ $(۰,۱)$ بحرانی‌اند:

$$f(x)=[x]\sin\pi x=\begin{cases}-\sin\pi x & ; -۱\le x<۰\\ ۰ & ; ۰\le x<۱\\ \sin\pi x & ; ۱\le x<۲\\ ۰ & ; x=۲\end{cases}$$



560 ٤ طول نقاط بحرانی در توابع به صورت $y=|f(x)|$ از حل معادلات $f(x)=۰$ و $f'(x)=۰$ به دست می‌آیند. پس:

$$y=|x^۳-x|\Rightarrow\begin{cases}f(x)=۰\Rightarrow x(x^۲-۱)=۰\Rightarrow x=۰,\ x=\pm ۱\\ f'(x)=۰\Rightarrow ۳x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}\end{cases}$$

از آن‌جایی که نقاط ابتدا و انتهای بازه بحرانی محسوب می‌شوند، بنابراین تابع f در بازهٔ $[-۱,۲]$ دارای ۵ نقطهٔ بحرانی به طول‌های $\{۰,۲,\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}},\pm ۱\}$ است.

561 ۱ ابتدا تابع را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^۲}=\begin{cases}(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} & ; x\ge ۲\\ -(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} & ; x<۲\end{cases}=\begin{cases}x^{\frac{۵}{۳}}-۲x^{\frac{۲}{۳}} & ; x\ge ۲\\ -x^{\frac{۵}{۳}}+۲x^{\frac{۲}{۳}} & ; x<۲\end{cases}$$

حال از تک تک ضابطه‌ها مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} & ; x>۲\\ -\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}+\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} & ; x<۲\end{cases}=\begin{cases}\frac{۵x-۴}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; x>۲\\ \frac{-۵x+۴}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; x<۲\end{cases}$$

اکنون با توجه به تابع f'، نقاط بحرانی را بررسی می‌کنیم:

1. $x=۰$ ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ پایینی است، پس نقطهٔ بحرانی است.
2. $x=\frac{۴}{۵}$ ریشهٔ صورت ضابطهٔ پایینی است، پس نقطهٔ بحرانی است.
3. مقدار مشتق چپ و راست در نقطهٔ مرزی $x=۲$ یکسان نیست، پس نقطهٔ بحرانی است. (توجه کنید در تابع f، ریشهٔ داخل قدر مطلق $x=۲$ است.)

562 ٤ بررسی گزینه‌ها:

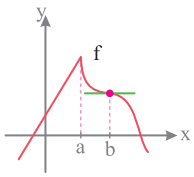
۱ چون عرض نقاط B و E نسبت به عرض نقاط اطراف آن‌ها بزرگ‌تر است، پس این نقاط ماکزیمم نسبی‌اند.

۲ عرض نقاط قبل از G کوچک‌تر از عرض نقطهٔ G و عرض نقاط بعد از G بزرگ‌تر از عرض نقطهٔ G است.

۳ ابتدا و انتهای بازه، اکسترمم نسبی نیستند.

۴ نقطهٔ E ماکزیمم نسبی است، چون عرض آن، از عرض نقاط اطرافش بیشتر است.

563 ۱ اگر نقطهٔ c در بازهٔ (a,b) اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه نقطهٔ بحرانی تابع هم می‌باشد. پس ۱ صحیح است. برای بررسی علت نادرستی سایر گزینه‌ها، نمودار تابع f را در نظر بگیرید:



۲ نقطهٔ به طول $x=b$ بحرانی است، زیرا $f'(b)=۰$ است، اما یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست.

۳ , ۴ نقطه به طول $x=a$ ماکزیمم نسبی بوده و بحرانی است، اما تابع f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

564 ۲ در توابع چند جمله‌ای و گویا ریشه‌های سادهٔ $f'(x)=۰$ طول نقاط اکسترمم تابع هستند. پس مشتق تابع را به‌دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{x^۲}=۰\Rightarrow\frac{x^۲-۴}{۴x^۲}=۰\Rightarrow\underbrace{x^۲-۴}_{x^۲=۴}=۰\Rightarrow x=\pm ۲$$

بنابراین نقاط $A(۲,۱)$ و $B(-۲,-۱)$ اکسترمم‌های تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با: $AB=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$

565 ۳ می‌دانیم ریشه‌های سادهٔ $f'(x)=۰$ طول نقاط بحرانی تابع هستند. پس از تابع مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=-۶x^۲+۶x+۱۲=۰\Rightarrow\underbrace{-x^۲+x+۲}_{a+c=b}=۰\Rightarrow x_۱=-۱,\ x_۲=۲$$

حال باکمک جدول تعیین علامت f'، نحوهٔ تغییرات تابع f را مشخص می‌کنیم تا نوع اکسترمم‌های نسبی مشخص شود، در نتیجه $x=-۱$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی و $x=۲$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		↘		↗		↘	

566 ۳ مشتق تابع f را به دست می‌آوریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۴}{۳}x^۳-۶x^۲+۸x\Rightarrow f'(x)=\underbrace{۴x^۲-۱۲x+۸}_{a+c=b}=۰\Rightarrow x=۱,\ x=۲$$

بنابراین جدول تعیین علامت f' به صورت مقابل است، در نتیجه $x=۱$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی و $x=۲$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		↗		↘		↗	

خرید آنلاین در gajmarket.com ویژه جمع‌بندی سریع
PLUS AZMOON پاسخ‌نامه